Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

Psychologisches Institut, Abteilung Methodenlehre

5300 Bonn 1, Römerstraße 164

Abstrakte Regelsysteme: Ein neuartiger, flexibler Aufgabentyp für kognitionspsychologische Untersuchungen interner Repräsentation und Kodierung
(vorläufige Fassung)

Rainer Mausfeld
Reinhard Niederee

Bonner Methoden-Berichte, 1985, 2(1), (Lfde.Nr.006)

ISSN 0177-3410

Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

Psychologisches Institut, Abteilung Methodenlehre

5300 Bonn 1, Römerstraße 164

normalerweise folgen Versuchsmaterialien einer Theorie; hier scheint mir ein – hochinteressantes – Paradigma auf der Suche nach einer Theorie...

Abstrakte Regelsysteme: Ein neuartiger, flexibler Aufgabentyp für kognitionspsychologische Untersuchungen interner Repräsentation und Kodierung
(vorläufige Fassung)

Rainer Mausfeld
Reinhard Niederée

Bonner Methoden-Berichte, 1985, 2(1), (Lfde.Nr.006)

ISSN 0177-3410

Inhalt:

Einleitung

Wir möchten in diesem Bericht einen Aufgabentyp vorstellen, "Abstrakte Regelsysteme"(ABRESY) genannt, der uns besonders geeignet erscheint zur Untersuchung einiger wichtiger Fragen der Arbeitsweise des visuell-kognitiven Systems, seiner Aufmerksamkeits- und Gedächtnismechanismen, der Verknüpfung linguistischer und quasi-perzeptueller Prozesse beim Problemlösen sowie zur diagnostischen Erfassung mathematischer Begabung (1).

In einem ausführlichen ersten Teil beschreiben wir anhand ausgewählter Beispiele den allgemeinen Aufbau des Aufgabentyps ABRESY. Wir haben diese Beispielaufgaben so konstruiert, daß die Vielfalt der geforderten Problemlöseprozesse ebenso deutlich wird wie die Flexibilität dieses Aufgabentyps auch für die Untersuchung anderer als der genannten Fragestellungen (etwa Prozesse induktiver Inferenz, Erwerb von Metakomponenten, Aufmerksamkeits- und Gedächtnisprozesse). Abschnitt 1.1 sowie die ersten Beispielaufgaben aus Abschnitt 1.2 vermitteln bereits einen ersten Eindruck vom Aufgabentyp ABRESY.
In einem weiteren Teil gehen wir kurz auf die Verwendung von ABRESY zur Untersuchung ausgewählter Fragen kognitiver Informationsverarbeitung ein.

Das Problemschema ABRESY erlaubt, wie wir hoffen demonstrieren zu können, unterschiedliche Mechanismen kognitiver Informationsverarbeitung von elementaren Prozessen (etwa der perzeptuellen Organisation) bis hin zu höheren, am komplexen Problemlösen beteiligten Prozessen systematisch in einem einheitlichen und präzise gefaßten System von Problemstellungen zu erkunden. Die für verschiedene Fragestellungen relevanten Problemfacetten (etwa Grad der Abstraktheit; Transparenz, Dynamik und andere Variablen der Komplexität; Art geforderter Urteilsaufgaben wie Deduktion, Analogie, Induktion u.ä.) können dabei weitgehend unabhängig voneinander variiert und miteinander verknüpft werden. Damit deutet sich eine Möglichkeit an, unter Kontrolle bedeutsamer Variablen eine Brücke zu schlagen zwischen den vergleichsweise gut studierten Prozessen auf elementarer Verarbeitungsebene und den höheren kognitiven Konzepten des komplexen Problemlösens.

---

(1) Dieser Aufgabentyp wurde von uns im Rahmen der Konstruktion eines vom Institut für Test- und Begabungsforschung der Studienstiftung des deutschen Volkes herausgegebenen auf das Studienfach Mathematik bezogenen Beratungstests für Abiturienten (SFT-Math; Fay, Mausfeld, Niederée, Stumpf, Trost, 1982) entwickelt.

1. Portrait des Aufgabentyps ABRESY

Der Aufgabentyp ABRESY gestattet es, eine Vielzahl von im weitesten Sinne kombinatorischen Problemen verschiedener Schwierigkeitgrade und Abstraktionsstufen auf ebenso einheitliche wie vergleichsweise einfache und exakte Weise darzustellen. Dabei umfaßt er ein ganzes Netz von teilweise aufeinander bezogenenen (bzw. beziehbaren) Aufgaben, für welche es unseres Erachtens, wie bereits angesprochen, interessante psychologische Anwendungen geben dürfte. Nach unseren Erfahrungen wird die Bearbeitung solcher Aufgaben von vielen Vpn trotz oder vielleicht sogar wegen ihres "abstrakten" (oder besser: formalen) Charakters aufgrund ihrer spielerischen Komponente (2) nach einer gewissen Einarbeitung als reizvoll erlebt, so daß in der Regel keine gravierenden Motivationsprobleme zu erwarten sind.

Im Abschnitt 1.1 wird der Aufgabentyp in seinen Grundformen allgemein vorgestellt. Diese Darstellung dient gleichzeitig als "Instruktion", auf die sich ein erster Block von typischen Beispielaufgaben mit erläuterten Lösungen bezieht, welcher in Abschnitt 1.2 folgt. Im Abschnitt 1.3 schließt sich eine grobe ad-hoc-Klassifikation von möglichen ABRESY-Aufgaben an. In Abschnitt 1.4 werden sodann Beispielaufgaben vorgestellt, welche in der einen oder anderen Art auf einer höheren Abstraktionsstufe angesiedelt sind als die "Grundaufgaben" aus Abschnitt 1.2; sie beziehen sich teilweise auf eine ebenfalls in Abschnitt 1.4 vorgestellte Erweiterung der ursprünglichen Instruktion für diesen Aufgabentyp. Zur Abrundung schließlich wird im Abschnitt 1.5 ein unsystematischer Ausblick auf mögliche Varianten gegeben.

Diese Darstellung will keine Systematik des Aufgabentyps entwickeln; auch versteht sie sich nicht als Leitfaden, in welchem konkrete Konstruktionsprinzipien für ABRESY-Aufgaben explizit vorgestellt werden. Unsere Vorgehensweise ist dagegen schwerpunktmäßig exemplarisch, darauf ausgerichtet, Anregungen zu vermitteln. Die von uns zu diesem Zweck konstruierten Beispielaufgaben sind so ausgewählt, daß sie, wie wir hoffen, einen Eindruck von einigen der vielfültigen psychologisch interessanten Aspekte dieses Aufgabentyps vermitteln.

Einer ausdrücklichen psychologischen Kommentierung der Aufgaben wollen wir uns im ersten Teil dieses Berichts weitgehend enthalten: wir hoffen, daß die vorgestellten Aufgaben in gewissem Umfang "für sich sprechen" und empfehlen dem Leser deshalb, zumindest einen Teil der Beispielaufgaben selbst zu bearbeiten. Er wird dann nicht so leicht Gefahr laufen, von der Vielfalt der Aufgaben oder den zugehörigen Erläuterungen "erschlagen" zu werden. Diese Gefahr könnte aus unserem Bemühen resultieren, anhand einer überschaubaren Zahl von Beispielaufgaben möglichst viele beachtenswerte inhaltliche wie formale Spielarten des

----

(2) In der Instruktion zum entsprechenden Untertest des SFT-Math (Fay et al., 1982) haben wir daher auch von "abstrakten Spielen" gesprochen.

prinzipiell nahezu unerschöpfbaren Aufgabentyps ABRESY darzustellen, zumal sich diese in vielfältiger Weise variieren und miteinander kombinieren lassen. Für praktische Anwendungen wird man sich in der Regel auf bestimmte Arten der Aufgabenstellung beschränken und hierzu gezielt Aufgaben konstruieren.

*****

1.1 Das "Material", auf welches sich ABRESY-Aufgaben beziehen, sind <u>Zeichenreihen</u>: dies sind endliche (sequentielle) Symbolkombinationen. Als "Symbole" werden hier (kleine) lateinische Buchstaben

$$a, b, c, \ldots$$

dienen,
eventuell auch durch Ziffern indiziert, z.B.

$$f_1, f_2, f_3, \ldots;$$

es könnten aber genausogut beispielsweise "geometrische Symbole" wie

○, ●, □, △

verwendet werden.

Zeichenreihen im Sinne dieser Vereinbarung sind also z.B.:

abc, f_1hhhg_2h, a(siehe Fußnote 3)

etc., wobei die Reihenfolge, in welcher die Symbole auftreten, das charakteristische Merkmal einer Zeichenreihe ist.
Da die Verknüpfung von Symbolen zu Zeichenreihen der Wortbildung aus Buchstaben vergleichbar ist, werden wir Zeichenreihen suggestiv auch als <u>Worte</u> bezeichnen.

Zeichenreihen lassen sich nun nach bestimmten Regeln transformieren, etwa solchen, welche es gestatten, Teile von Zeichenreihen durch andere Zeichenreihen zu ersetzen. Hierzu führen wir den Begriff des <u>Teilworts</u> ein; er erklärt sich weitgehend selbst: so ist z.B.

"abc" Teilwort von "dabcd" (d$\underbrace{abc}$d),

----
(3) Grenzfall: Zeichenreihe der "Länge" 1; unter der Länge einer Zeichenreihe verstehen wir die Anzahl der Zeichen, aus denen sie zusammengesetzt ist: "hhh" hat beispielsweise die Länge 3.

ebenso wie z.B.: "a", "abcd", oder - als Grenzfall - das gesamte Wort selbst, hier also "dabcd". Keine Teilworte von "dabcd" sind z.B.: "e", "dbd" (nicht zusammenhängend), "cba" (falsche Reihenfolge).

Eine Zeichenreihe kann in einem Wort an mehreren Stellen als Teilwort auftreten, wie z.B.

"abc" in "abcabc" an den Stellen

$$\underbrace{abc}\,abc \quad \text{und} \quad abc\,\underbrace{abc}$$

oder

"aba" in "ababa" an den Stellen

$$\underbrace{aba}\,ba \quad \text{und} \quad ab\,\underbrace{aba}$$

Wir führen nun zwei Arten von Regeln ein, welche die Ersetzung gewisser Teilworte gestatten:

****

<u>Regeltyp 1</u>: "Zeichenreihe 1" $\longrightarrow$ "Zeichenreihe 2",

z.B. $abc \longrightarrow ba$;

eine solche Regel ist auf Worte anwendbar, welche "Zeichenreihe 1" als Teilwort enthalten; sie erlaubt, diese Zeichenreihe <u>an einer Stelle</u> durch "Zeichenreihe 2" zu ersetzen.
Z.B. führt die einmalige Anwendung der gerade genannten Regel auf "abcabc" zu "abcba" oder zu "baabc", je nachdem, an welcher Stelle die Regel angewandt wird:

$$abc\,\underbrace{abc}_{ba} \quad \text{oder} \quad \underbrace{abc}_{ba}\,abc.$$

****

<u>Regeltyp 2</u>: " $\Longrightarrow$ " statt " $\longrightarrow$ ", also z.B.

$abc \Longrightarrow ba$;

Die Voraussetzungen für die Anwendung sind die gleichen wie eben, im Anwendungsfalle muß "Zeichenreihe 1" aber <u>an allen Stellen</u> ihres Vorkommens durch "Zeichenreihe 2" ersetzt werden (4), d.h. " abcabc" wird hier in einem Schritt in "baba" überführt:

$$\underbrace{abc}_{ba}\,\underbrace{abc}_{ba}.$$

****

----

(4) Bei der Aufgabenkonstruktion muß hier entweder darauf geachtet werden, daß "Konfusionsfälle", wie sie sich z.B. im Falle der versuchten Anwendung einer Regel wie "aba $\Longrightarrow$ c" auf das Wort "abababa" ergeben, nicht vorkommen, oder aber es muß die Instruktion entsprechend präzisiert werden.

Das gleiche Wort ließe sich aus "abcabc" mithilfe der Regel "abc ⟶ ba" in zwei Schritten erzeugen (d.h. man wendet sie auf "abcabc" an und auf das resultierende Wort nochmals).

Ein möglicher Weg:

abc abc

1. Schritt

abc ba

2. Schritt

baba

(Umgekehrt läßt sich beispielsweise "abcba" aus "abcabc" zwar mittels "abc ⟶ ba" erzeugen, aber nicht mittels "abc ⟹ ba", auch nicht in mehreren Schritten.)

Interessante Effekte ergeben sich nun häufig durch das Zusammenwirken mehrerer solcher Regeln:

****

Geben wir eine Menge von Regeln vor, so sprechen wir von einem <u>Regelsystem</u>. Aus einem Wort W1 heißt ein anderes - W2 - <u>erzeugbar</u> mittels eines solchen Regelsystems, wenn W2 sich in endlich vielen Schritten durch sukzessive Anwendung der zum Regelsystem gehörigen Regeln aus W1 ergibt; dabei können die Regeln in beliebiger Häufigkeit und Reihenfolge verwendet werden (im Grenzfall: gar nicht, d.h., jedes Wort gilt als aus sich selbst erzeugbar).

****

Wir haben uns hiermit eine Nomenklatur geschaffen, welche zum einen aus einer einfachen formalen Regelsprache zur einheitlichen Beschreibung einer Vielzahl von Regelsystemen besteht, andererseits aus exakt einführbaren Begriffen, wie "Wort" und "Teilwort", "erzeugbar", "(Anwendungs-)Schritte", welche diese formale Sprache mit "Leben" erfüllen, ihnen eine Semantik zuweisen. Gleichzeitig können wir mit ihrer Hilfe Fragen zur Wirkungsweise von Regelsystemen formulieren.

Die Worte, welche aus einem fest vorgegebenen "Startwort" mithilfe eines bestimmten Regelsystems erzeugbar sind, sind häufig durch mehr oder weniger einfach erfaßbare bzw. beschreibbare äußere Merkmale (z.B. "geometrischer" Art) von den nicht-erzeugbaren abgegrenzt.(5)

----

(5) Regelsysteme auf der Grundlage des ersten Regeltyps "Z1 ⟶ Z2" sind zentraler Gegenstand der Theorie der formalen Sprachen, einem Teilgebiet der theoretischen Informatik (siehe hierzu e.g. Hopcroft & Ullmann,1979 oder Maurer,1969). Sie werden dort nach dem Mathematiker A. Thue, welcher sich als erster dem mathematischen Studium derartiger Transformationen von Zeichenreihen gewidmet hat (Thue,1914), als Semi-Thue-Systeme (oder Produktionssysteme) bezeichnet. Durch geringfügige Modifikation dieses Konzeptes (Auszeichnung von Hilfssymbolen, sogenannten "metalinguistischen Variablen", vgl. Anmerkung zu Aufgabe 7) gelangt

So sind z.B. vermittels des Regelsystems

b $\longrightarrow$ ab   b $\longrightarrow$ bc

aus dem Startwort "b" gerade die Worte der Form "a...abc...c"

(Forts.) man zum Konzept von "Regelgrammatik" und "Regelsprache" (als der mithilfe einer Regelgrammatik aus einem ausgezeichneten Startwort erzeugten Wortmenge). Eine der wesentlichen Fragestellungen der Theorie der formalen Sprachen in bezug auf Regelsprachen ist die nach der "Komplexität" dieser Wortmengen: wie "komplex" muß ein Algorithmus (Programm) sein, mit dessen Hilfe für ein beliebiges Wort entschieden werden kann, ob es zu dieser Menge gehört oder nicht. Das Spektrum reicht dabei von sehr einfachen Wortmengen bis zu solchen, für welche es - nach einem klassischen Resultat der mathematischen Theorie der Berechenbarkeit (Rekursionstheorie) - mathematisch beweisbar keinen solchen (Entscheidungs-)Algorithmus geben kann. Der Komplexitätsbegriff, welcher in diesem Zusammenhang üblicherweise zugrundegelegt wird, ist - wie es nicht anders zu erwarten ist - zugeschnitten auf Entscheidungsverfahren, welche sich jeweils auf spezielle Regelsprachen beziehen und auf der (sequentiellen) algorithmischen Abarbeitung von Worten beliebiger Länge durch Automaten ("Computer") basieren, wobei verschiedene Automatenmodelle diskutiert werden. Diese führen nahezu zwangsläufig zu einer anderen Gewichtung quantitativer und qualitativer Aspekte von Regelsystemen, als dies aus psychologischer Sicht in bezug auf menschliche Wahrnehmungs- und Problemlöseprozesse angemessen erscheint. Eine wichtige Rolle dürften hier u.a. die oben angesprochenen "strukturellen Merkmale" spielen, welche die Worte einer Regelsprache charakterisieren und die oft von eher "universeller" Natur sind, wenn ihre Erkennung auch in der einen oder anderen Form häufig erlernt sein dürfte. Bei hinreichend kurzen bzw. klar gegliederten Worten sind sie nicht selten holistisch - gewissermaßen "auf einen Blick" (wenn auch nicht stets auf den ersten) - identifizierbar.
Begriffe wie "Struktur" und "strukturelles Merkmal", sowie ihre jeweiligen Spezifizierungen ("geometrisch", "Symmetrie", "Ordnung",...) werden von uns hier in einem von mathematischer Betrachtungsweise mitgeprägten intuitiven Sinne gebraucht. Eine für eine psychologische Theoriebildung adäquate formale Präzisierung dieser Konzepte erscheint uns wünschenswert.

Zum Schluß dieses Exkurses zur Theorie der formalen Sprachen, wollen wir noch erwähnen, daß über den Regeltyp "Z1 $\longrightarrow$ Z2" hinaus noch die Verwendung der Begriffe "Wort", "Teilwort", des Regeltyps "Z $\longrightarrow$ • "(vgl. Aufgabe 9), die Verwendung von Hilfssymbolen (wie bereits erwähnt), sowie - gelegentlich - die Verwendung "mehrstufiger Regelsysteme" (vgl. 1.5.2) dieser Theorie entlehnt sind oder dort eine Rolle spielen.
Beachtenswert scheint uns die Tatsache, daß die dort eingeführten elementaren Transformationsregeln - auf welche andere dann zurückgeführt werden - auf das jeweilige Wort lokal wirken (wie insbesondere "Z1 $\longrightarrow$ Z2"); unsere Grundregeln haben dagegen auch teilweise globalen oder stärker strukturabhängigen Charakter (wie "Z1 $\Longrightarrow$ Z2" oder die in 1.4 und 1.5 eingeführten Regeln); sie sind durch lokale simulierbar.

erzeugbar (wobei der a-Block und/oder der c-Block entfallen können).
Wir werden übrigens in Fällen, wo - wie hier - Teilworte wiederholt auftreten, die abkürzende Schreibweise

$$Z^n \quad \text{für} \quad \underbrace{Z\ldots\ldots Z}_{n\text{-mal}}$$

verwenden (gegebenenfalls auch, der Eindeutigkeit halber, Z in Klammern), wo Z für eine beliebige Zeichenreihe steht und n für eine natürliche Zahl (0,1,2,...; 0 bedeutet: die Zeichenreihe entfällt), also z.B.

$(ab)^4$ für abababab   bc → bcc → bccc ...

$a^n bc^m$ für $\underbrace{a\ldots\ldots a}_{n\text{-mal}}\ b\ \underbrace{c\ldots\ldots c}_{m\text{-mal}}$.

Das letztgenannte Wort läßt sich mithilfe des obigen Regelsystems in n+m Schritten erzeugen (n-mal Regel "b ⟶ ab", m-mal Regel "b ⟶ bc" in beliebiger Reihenfolge).

*

Hat man nun ein Regelsystem wie das genannte konstruiert, welches, auf ein Startwort angewandt, in überschaubarer Weise Worte mit interessanten Merkmalen zu erzeugen gestattet (Inhalt und Ausprägung der Begriffe "überschaubar" und "interessant" werden dabei von den Intentionen des Experimentators/Diagnostikers abhängen), so kann man beispielsweise durch geeignete Fragen herausfinden, ob die Vpn die Struktur von Regelsystemen/Worten erkennen (6).

Der wohl einfachste Fragetyp hierfür wäre folgender: man gibt eine (sinnvoll zusammengestellte) Liste von Worten vor mit der Frage, welche dieser Worte erzeugbar sind; man kann auch Zeichenreihen vorgeben mit der Frage, ob diese als Teilwort eines erzeugbaren Wortes auftreten. Auf diese Fragetypen werden wir als erstes in der nun folgenden Beispielsammlung zurückgreifen, anschließend aber noch etliche weitere Fragemöglichkeiten vorstellen (zu den meisten der darin vorkommenden Regelsysteme ließen sich natürlich auch sinnvolle Aufgaben nach dem Muster der beiden angesprochenen "Grundtypen" konstruieren).

*****

----

(6) Dieses Konzept hat der Entwicklung des Aufgabentyps zugrundegelegen. Man kann natürlich auf elementarer Ebene zunächst z.B. die Fähigkeit zur ein- oder (begrenzt) mehrschrittigen Anwendung der Regeln bzw. zur Identifizierung einfacher Wortmerkmale untersuchen.

1.2 Es folgt, wie angekündigt, ein Block erläuterter Beispielaufgaben. Die Erläuterungen sollen die Struktur von Regelsystemen und ihre Wirkungsweise (bzw. die für die aus einem Startwort erzeugbaren Worte charakteristischen Merkmale) transparent werden lassen und eine erste Idee vermitteln von möglichen "Lösungsstrategien". Einige Aufgaben sind ergänzt durch Zusatzfragen, welche die ursprüngliche Aufgabenstellung vertiefend variieren und teilweise mit Konzepten aus anderen Aufgaben verknüpfen. In der Praxis könnten solche Zusatzfragen - die richtige Lösung der Ausgangsfrage vorausgesetzt - verschiedene Funktionen erfüllen, z.B. einen Hinweis erbringen darauf, wie "tiefgreifend" das Verständnis der Vp für das jeweilige Regelsystem ist oder welcher Lösungsstrategie sie gefolgt ist. (7)

****

<u>Beispielaufgabe 1</u>:

Wir betrachten die Worte, welche sich aus

abcabc

mittels der Regel

$ca \longrightarrow cabca$

erzeugen lassen:

Kann in einem dieser Worte die Zeichenreihe

ac

als Teilwort auftreten?

****

<u>Lösung</u>: Nein

<u>Erläuterung</u>: Die erzeugbaren Worte sind gerade die Worte der Form $(abc)^n$ $(n=2,3,.....)$; dies sieht man am schnellsten, wenn man die Regel wie folgt strukturiert:

$ca \longrightarrow c\,\underbrace{abc}\,a$

----

(7) Die Schwierigkeit der ausgewählten Aufgaben streut um ein mittleres Schwierigkeitsniveau ~~sprechen~~. Genauer: bezogen auf eine Stichprobe von 497 Abiturienten mit dem Studienwunsch Mathematik betrug die durchschnittliche Itemschwierigkeit teilweise vergleichbarer Aufgaben des SFT-Math (Fay et al., 1982) etwa .60. (Es lassen sich aber ohne weiteres leichtere oder schwierigere Aufgaben konstruieren.)

(die Strukturierung "ca $\longrightarrow$ ca $\underbrace{bca}$" wäre weniger günstig); man "sieht" dann, daß diese Regel gerade gestattet, in einem Teilwort der Gestalt

$$\underbrace{abc}\,\underbrace{abc}$$

zwischen die zwei abc-Blöcke auf dem Wege

$$ab\ \underbrace{ca}\ bc$$

$$\downarrow$$

$$ab\ \underbrace{cabca}\ bc \quad (= \underbrace{abc}\,\underbrace{abc}\,\underbrace{abc}\ )$$

einen weiteren solchen Block einzuschieben. (8)

Zusatzfrage: Welche Teilworte der Länge 2 (also solche, die aus zwei Buchstaben zusammengesetzt sind) können außerdem nicht auftreten? (Nur solche berücksichtigen, die aus a,b,c zusammengesetzt sind.)

Antwort: aa, bb, cc, ba, cb.

****

Beispielaufgabe 2:

Welche der folgenden Worte lassen sich aus

s

mithilfe der Regeln

s $\longrightarrow$ hsg

s $\longrightarrow$ fsh

erzeugen?

(A)	fhshg	(D)	hgshf
(B)	hhsssgg	(E)	fhsggh
(C)	hfhsgh	(F)	hfhsghg

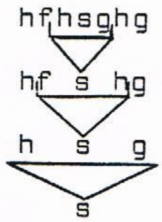
****

----

(8) Diese Betrachtungsweise ist insofern erhellend, als sich eine Reihe von Ersetzungsregeln in dieser Weise fruchtbar als "Einschieberegeln" oder "Generierungsregeln" - "c" und "a" generieren gemeinsam "abc" - interpretieren lassen; dies gilt z.B. auch für die Regeln aus Beispielaufgabe 2.

<u>Lösung</u>: nur (F)

<u>Lösungsstrategie 1</u>: Man versuche, systematisch alle Worte bis zu einer gewissen Länge aus s zu erzeugen oder umgekehrt die Regeln "rückwärts" anzuwenden und so zu s zu gelangen.
Letzteres geht nur in Fall (F):



<u>Lösungsstrategie 2</u>: Man versuche, sich die allgemeine Struktur der erzeugbaren Worte klarzumachen. (Durch anfängliches "Herumexperimentieren" - obiges Beispiel mag z.B. eine Idee liefern - oder über eine "Analyse" des Regelsystems - "logisch-abstrakt" und/oder "geometrisch-veranschaulichend"; diese Strategien werden sich oft in der einen oder anderen Weise mischen.) (9)

Es erweisen sich gerade die Worte als erzeugbar, welche die Gestalt haben:

W1 s W2 (W1,W2 Teilworte)

wobei W1 aus W2 hervorgeht, indem man

1. die Reihenfolge der Buchstaben umkehrt (Spiegelung) und dabei
2. h durch sein "Rechtspendant" g
   f durch sein "Rechtspendant" h
   ersetzt (nach dem Muster der Regeln s $\longrightarrow$ hsg, s $\longrightarrow$ fsh)
   (z.B. hfhsghg).

Die erzeugbaren Worte sind also in diesem leicht "getarnten" Sinne symmetrisch ("Symmetrieachse" ist s). Es haben nämlich die

----

(9) Erwähnenswert scheint uns ,daß sich hierin Arbeitsprinzipien widerspiegeln, wie sie z.B. auch von Mathematikern aus ihrer Arbeit bzw. Theorienbildung heraus beschrieben werden. Man beachte - um zwei Beispiele zu nennen - Brieskorns Bemerkungen zur "Dialektik" von Geometrie und Algebra (Brieskorn, 1974) und Polyas Betrachtungen zur Rolle von Induktion und Analogie in der Mathematik (Polya, 1954a,b). Wir wollen diese intuitiv gefaßten Andeutungen an dieser Stelle nicht weiter hinterfragen.

beiden in einem Schritt erzeugten Worte hsg und fsh diese Eigenschaft; und hat W1 s W2 diese Eigenschaft, so haben auch die beiden daraus in einem Schritt erzeugbaren Worte

W1 hsg W2 und W1 fsh W2

diese Eigenschaft; sie bleibt also bei Regelanwendung erhalten.(10)

Andererseits lassen sich offenbar alle diese Worte erzeugen, wobei die innersten "Buchstabenpaare" der letzten, die äußersten der ersten Regelanwendung enprechen.

Eine <u>anschauliche</u> <u>Version</u> dieser Überlegungen:

Man stelle sich zwei Stapel vor, bestehend aus den "Figuren" ◯ und □ : in gleicher Höhe müssen die gleichen Figuren auftreten; als "Deckel" obenauf das s:

z.B.

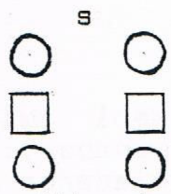


Abb. 1

Man erlaube nun, das s eine Etage anzuheben und beide Stapel um je ein ◯ oder je ein □ aufzustocken:

◯ links steht für h, rechts für g,

□ links steht für f, rechts für h;

die beiden Stapel entsprechen den Teilworten W1 (links) bzw. W2 (rechts) die "heruntergeklappt" sind (Abb. 2,3).

----

(10) Derartige Invarianzbetrachtungen (d.h. Beobachtungen, daß gewisse Merkmale bei Regelanwendung unverändert bleiben) spielen in der einen oder anderen Einkleidung häufig eine erhebliche Rolle; sie können Voraussetzung für ein "tieferes Verständnis" der Situation sein. Solche Einsichten müssen aber nicht unbedingt sprachlich-analytischer Natur sein. Ihre sprachlich-analytische Umsetzung ist jedoch insbesondere Voraussetzung für einen streng deduktiven Beweis entsprechender Behauptungen auf der Basis der mathematischen Schlußfigur der vollständigen Induktion. Es sei angemerkt, daß sämtliche Lösungen der hier vorgestellten Aufgaben auf diesem Wege mathematisch beweisbar sind.

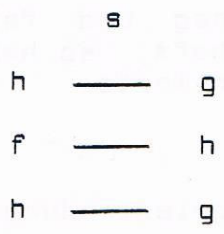


Abb. 2

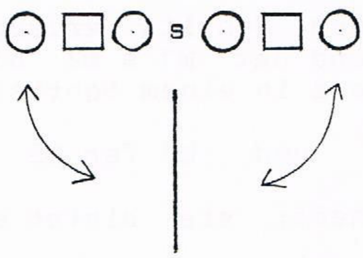


Abb. 3

Die Abbildungen 1-3 entsprechen also dem Wort

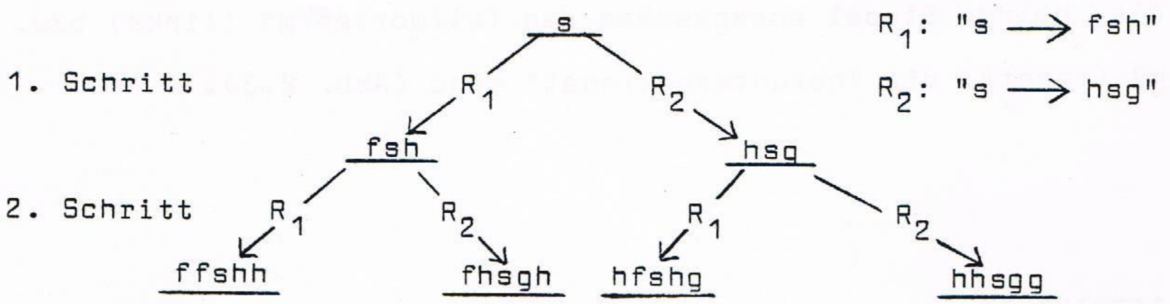
hfhsghg,

die Regel "s ⟶ hsg" entspricht dem Aufstocken um ◯ , die Regel "s ⟶ fsh" dem um □ . (11)

Zusatzfrage: Wie viele Worte lassen sich in genau 4 Schritten aus s erzeugen? (alternativ: Wie viele Worte mit genau 9 Buchstaben lassen sich aus s erzeugen?):

Antwort: 16 ($=2^4=2\times2\times2\times2$)

Erläuterung: Bei jedem Schritt hat man die Wahl zwischen der Anwendung zweier Regeln (beide sind stets anwendbar); je zwei verschiedene Folgen von Wahlen führen zu verschiedenen Worten. In n Schritten lassen sich also 2^n Worte erzeugen; sie haben die Gestalt W1 s W2, wo W1 und W2 beliebige aus f und h bzw. h und g zusammengesetzte Sequenzen der Länge n sind, und W1 durch W2 festgelegt ist ("Quasi-Symmetrie"); die Gesamtlänge beträgt also $2n + 1$ (d.h. Länge $9 = 2\times4 + 1$ entspricht 4 Schritten). Dies läßt sich durch einen "Baum" darstellen (Fachterminus; man stelle ihn sich "auf den Kopf gestellt" vor: Wurzeln oben, Zweige unten):



etc.

----

(11) Eine einfachere Variante dieser Aufgabe erhält man naheliegenderweise durch Bezug auf die Regeln "s ⟶ fsf", "s ⟶ gsg". Diese Aufgabe zeigte bei der in Fußnote 7 angesprochenen Untersuchung mit die höchste korrelative Beziehung zu qualitativ-geometrischen Aufgaben zur Erfassung "mathematischer Raumvorstellung".

****

Beispielaufgabe 3:

Welche der folgenden Worte lassen sich mithilfe der Regeln

$$s \longrightarrow g_1 s$$

$$g_1 \Longrightarrow g_2$$

$$g_2 \Longrightarrow g_3$$

$$g_3 \Longrightarrow g_4$$

$$g_4 \Longrightarrow g_5$$

aus s erzeugen?

(A) $(g_5)^7 s$ (B) $(g_2 g_1)^3 s$

(B) $g_5 g_4 (g_2)^3 s$ (D) $g_3 g_3 g_1 s$

(C) $g_4 g_5 s$ (F) $g_5 g_4 g_3 g_2 g_1 s$

****

Lösung: (A), (B), (E), (F).

Erläuterung: Einige Regelanwendungen (z.B. bei dem Versuch, (F) zu erzeugen) bzw. "genaues Hinsehen" führen zu der Beobachtung, daß auf der von s aus gesehenen linken Seite von rechts immer g_1 nachgeschoben werden kann. Die Hierachie der Regeln

$$"g_1 \Longrightarrow g_2 \Longrightarrow g_3 \Longrightarrow g_4 \Longrightarrow g_5"$$

führt dadurch zu einer dem Index nach von rechts nach links aufsteigender Ordnung von g_i-Blöcken; präziser: erzeugbar sind genau die Worte der Form

$$(g_5)^{n5}(g_4)^{n4}(g_3)^{n3}(g_2)^{n2}(g_1)^{n1} s$$

Tatsächlich läßt sich jedes derartige Wort erzeugen:

Überführe s in $(g_1)^{n1}$ (n_5-mal Regel $s \longrightarrow g_1 s$)

dies in $(g_5)^{n5}$ (erst Regel $g_1 \Longrightarrow g_2$, dann $g_2 \Longrightarrow g_3$, etc)

dies in $(g_5)^{n5}(g_1)^{n4}s$ (n_4-mal Regel $s \longrightarrow g_1 s$)

dies in $(g_5)^{n5}(g_4)^{n4}s$ ($g1 \Longrightarrow g2, \ldots\ldots, g3 \Longrightarrow g4$)

Andere Worte können nicht erzeugt werden; das erste erzeugbare Wort, "s", hat diese Form (n1=n2=n3=n4=n5=0), und diese Eigenschaft kann durch Regelanwendung nicht zerstört werden: wendet man auf

$$(g_5)^{n5}(g_4)^{n4}(g_3)^{n3}(g_2)^{n2}(g_1)^{n1}s$$

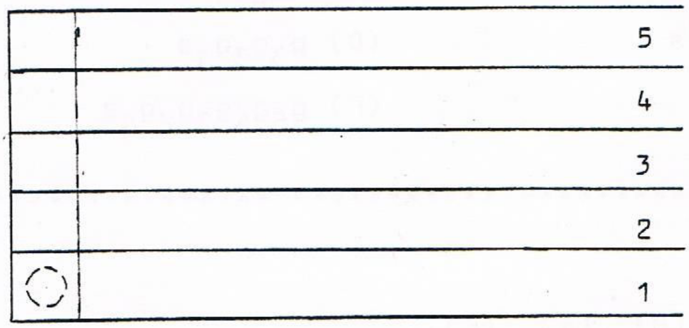
z.B. "$g_2 \Longrightarrow g_3$" an, so erhält man

$$(g_5)^{n5}(g_4)^{n4}(g_3)^{n2+n3}(g_1)^{n1}s,$$

also wieder ein Wort dieser Form.

Veranschaulichung:

Alle erzeugbaren Worte haben die Form W1 s, wo W1 eine aus $g_1,\ldots,g_5$ zusammengesetzte Zeichenreihe ist. Es gilt also, sich die mögliche Form von W1 klarzumachen: Hierzu stelle man sich z.B. fünf Niveaus vor,

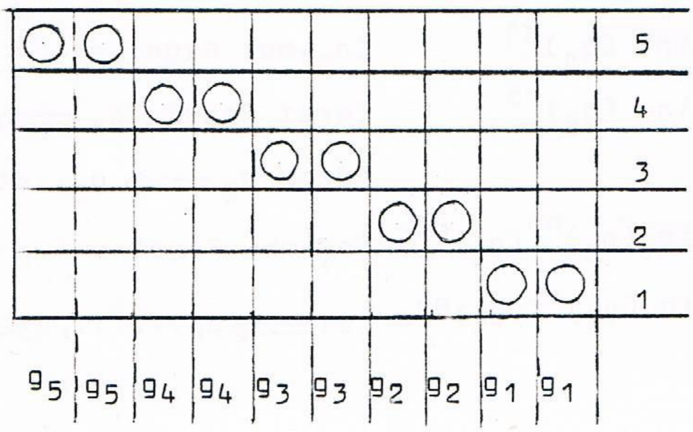


in denen "Kugeln" (◯) plaziert werden dürfen (aber nie zwei Kugeln übereinander). Im ersten Schritt sei es erlaubt, eine Kugel unten links (Niveau 1) zu plazieren, später darf man entweder

(a) eine Kugel in Niveau 1 hinzufügen, und zwar so, daß sie rechts von allen bereits vorhandenen Kugeln (gleich welchen Niveaus) zu liegen kommt, oder

(b) alle Kugeln eines beliebigen Niveaus gleichzeitig vertikal um ein Niveau anheben.

Interpretation: Eine Kugel in Niveau i entspricht einem g_i, die Kugeln, so von links nach rechts "gelesen" W1, z.B.



Dem ersten Schritt entspricht das aus s in einem Schritt erzeugbare Wort "g_1s" (d.h. $W1 = g_1$); "Spielregel" (a) entspricht der Regel "$s \longrightarrow g_1s$", "Spielregel" (b) den Regeln "$g_1 \Longrightarrow g_2$", ...,"$g_4 \Longrightarrow g_5$".

(Tatsächlich wird man sich dies selten gerade so veranschaulichen, aber angesichts der Regeln "$g_i \Longrightarrow g_{i+1}$" vielleicht intuitiv vom "Hochheben" der g_i sprechen.)

Bemerkungen:

(a) Das Prinzip kann man sich sehr leicht klar machen, wenn man das vereinfachte Regelsystem

$$s \longrightarrow g_1s, \quad g_1 \Longrightarrow g_2$$

studiert, dann vielleicht noch die Regel $g_2 \Longrightarrow g_3$ hinzunimmt und das erkannte Prinzip auf das komplette Regelsystem überträgt.

(b) Die Durchführung von "Lösungsstrategie 1" aus den Erläuterungen zu Aufgabe 2 wird hier - was "systematisches Erzeugen" anbetrifft - durch die große Zahl der erzeugbaren Worte erschwert; in bezug auf "Rückwärtsanwendung der Regeln" stellt sich das Problem, daß die Regeln "$g_i \Longrightarrow g_j$" keine direkte Umkehrung besitzen: aus "$g_1g_2g_1$" ist z.B. mittels "$g_1 \Longrightarrow g_2$" "$g_2g_2g_2$" erzeugbar, "$g_2 \Longrightarrow g_1$" führt aber nicht zurück zum Ausgangswort, sondern zu "$g_1g_1g_1$" (man müßte statt dessen zweimal die Regel "$g_2 \longrightarrow g_1$" anwenden); umgekehrt: obwohl "$g_2g_1g_2$" durch "$g_2 \Longrightarrow g_1$" in "$g_1g_1g_1$" überführt werden kann, kann es nicht mittels "$g_1 \Longrightarrow g_2$" daraus erzeugt worden sein.

Zusatzfrage 1: Würde sich durch Hinzunahme der Regeln

$$g_5 \Longrightarrow g_4$$
$$g_4 \Longrightarrow g_3$$
$$g_3 \Longrightarrow g_2$$
$$g_2 \Longrightarrow g_1$$

die Lösung der Aufgabe ändern? D.h. wären mehr Worte erzeugbar?

Antwort: Nein

(Begründung: diese Regeln erhalten die beschriebene Ordnung ebenso wie ihre "Zwillinge" "$g_1 \Longrightarrow g_2$" etc.; dies ergibt sich mittels einer völlig analogen Überlegung)

Zusatzfrage 2: Welche der folgenden Worte lassen sich mittels

$$s \longrightarrow f_1 s f_1$$
$$f_1 \Longrightarrow f_2$$
$$f_2 \Longrightarrow f_3$$
$$f_3 \Longrightarrow f_4$$
$$f_4 \Longrightarrow f_5$$

aus s erzeugen?

(A) $f_1 f_2 f_3 s f_1 f_2 f_3$

(B) $f_4 f_5 s f_5 f_4$

(C) $f_1 f_1 s f_2 f_2 f_2$

(D) $f_5{}^4 f_3 f_2{}^3 s f_2{}^3 f_3 f_5{}^4$

(E) $f_6 f_5 f_4 s f_1 f_2 f_3$

Lösung: aus der obigen Liste (D); erzeugbar sind alle Worte der Form

$$(f_5)^{n5}(f_4)^{n4}\ldots(f_1)^{n1}s(f_1)^{n1}\ldots(f_4)^{n4}(f_5)^{n5}$$

(Überlagerung eines Symmetrie- und eines Ordnungsaspektes).

Bemerkung: Eine andere mögliche Verfeinerung bestände z.B. darin, das Regelsystem

$$s \longrightarrow sf_1,\ s \longrightarrow sf_2$$
$$f_1 \Longrightarrow f_3$$
$$f_2 \Longrightarrow f_4$$
$$f_3 \Longrightarrow f_5$$
$$f_4 \Longrightarrow f_6$$

zu betrachten. Hier sind alle Worte der Form

s W1

erzeugbar, wo W1 ein Wort ist, das sich (höchstens) aus $f_1,\ldots,f_6$ zusammensetzt und die Eigenschaften hat:

f_1 steht immer links von f_3 und f_5, f_3 immer links von f_5,

f_2 steht immer links von f_4 und f_6, f_4 immer links von f_6.

(D.h. man bildet zwei Worte der Form s W1 und s W2 mit den Regeln

"$s \longrightarrow sf_1$", "$f_1 \Longrightarrow f_3$", "$f_3 \Longrightarrow f_5$" bzw.

"$s \longrightarrow s\ f_2$", "$f_2 \Longrightarrow f_4$", "$f_4 \Longrightarrow f_6$" wie gehabt,

und bildet ein neues Wort s W3, indem man W1 und W2 zu einem neuen Wort W3 verschachtelt).

****

Beispielaufgabe 4:

Welche der Regeln

(A) st $\longrightarrow$ as

(B) ts $\longrightarrow$ st

(C) ts $\longrightarrow$ ss

(D) st $\longrightarrow$ ts

muß man zu den Regeln

ta $\longrightarrow$ at

as $\longrightarrow$ sa

hinzunehmen, damit sich aus dem Wort

$ta^{10}s$

das Wort

$sa^{10}t$

erzeugen läßt?

****

Lösung: Regel (B)

Erläuterung: Die Regel "ta $\longrightarrow$ at" bewirkt ein "Wandern" des t nach rechts, die Regel "as $\longrightarrow$ sa" ein Wandern des t nach links. Der Prozeß wird jedoch blockiert, wenn s und t zusammentreffen; hier ist eine einmalige Anwendung der Regel "ts $\longrightarrow$ st" erforderlich. Die Regel (D) könnte nie zur Anwendung kommen, ist also nutzlos; die Regeln (A) und (C) verändern in irreversibler Weise die Anzahl der t und a bzw. der s und t (sie ist jedoch im "Endwort" jeweils die gleiche wie im Startwort!)

Zusatzfrage:

Wie viele Schritte braucht man mindestens bzw. höchstens um mittels der Regeln

$$ta \longrightarrow at$$

$$as \longrightarrow sa$$

$$ts \longrightarrow st$$

aus "$ta^{10}s$" das Wort "$sa^{10}t$" zu erzeugen?

Antwort: 21 (mindestens und höchstens) (12)

Erläuterung: unabhängig davon,wo sich s und t "treffen":

1. 10 Schritte "Wandern von t nach rechts"
2. 10 Schritte "Wandern von s nach links"

$\to \Gamma$ 3. 1 Schritt "ts Γ st",

wobei 1. und 2. vermischt werden können.

Bemerkung: Etwas schwieriger wäre z.B. die entsprechende Frage, in wieviel Schritten (minimal/maximal) mittels der Regeln aus Aufgabe 3 das Wort

$$g_5g_4g_3g_2g_1s$$

erzeugt werden kann (es sind minimal/maximal 5+4+3+2+1=15 Schritte); oder das Wort

$$g_5{}^2g_4{}^2g_3{}^2g_2{}^2g_1{}^2s$$

(es sind minimal (2+4)+(2+3)+(2+2)+(2+1)+2=20 Schritte: erst aus "s" "$g_1{}^2s$" erzeugen und daraus "$g_5{}^2s$" =2+4 Schritte etc.; maximal 2x15=30: erst aus "s" "g_1s", daraus "g_5s" = 5 Schritte, dann "g_5g_1s", daraus "$g_5{}^2s$" = 5 Schritte, etc.)

----

(12) Eine Vereinfachung durch Verringerung der arithmetischen Komponente ergäbe sich durch die Fragen: (i) "Gibt es eine maximale Schrittzahl?" und (ii) "Falls ja, ist diese größer als die Mindestzahl?".

****

Beispielaufgabe 5:

Welche der folgenden Worte treten nie als Teilwort eines Wortes auf, welches aus

$$a(g_1g_2g_3)^{100}b$$

mithilfe der Regeln

$$g_ig_j \longrightarrow g_jg_i \quad \text{für } i,j = 1,2,3$$

$$ag_1 \longrightarrow g_1a$$

$$g_3b \longrightarrow bg_3$$

erzeugbar ist:

(A) $ag_1(g_2g_3)^{99}g_2b$

(B) $ag_1(g_2g_3)^{99}g_3b$

(C) ab

(D) ag_3

****

Lösung: (B) und (C)

Erläuterung: Wir haben es wieder mit "Wanderregeln" (d.h. Permutationsregeln einfachster Art) zu tun: die g_i $(i = 1,2,3)$ können beliebig vertauscht werden (soweit kein "Hindernis" (a, b) im Wege ist; g_1 kann beliebig nach links wandern (auch über a), g_3 nach rechts (auch über b), g_2 bleibt zwischen diesen beiden "Membranen" a und b eingeschlossen; d.h. insbesondere: die Anzahl der g_2 zwischen a und b bleibt unverändert (d.h. = 100).

****

Beispielaufgabe 6:

I H 2 1 3

Mithilfe von sechs der folgenden Regeln

(A) ac ⟶ cb

(B) ca ⟶ bc

(C) bc ⟶ bd

(D) ad ⟶ ac

(E) bd ⟶ db

(F) bd ⟶ da

(G) db ⟶ ad

läßt sich aus

caaac

das Wort

cbbbc

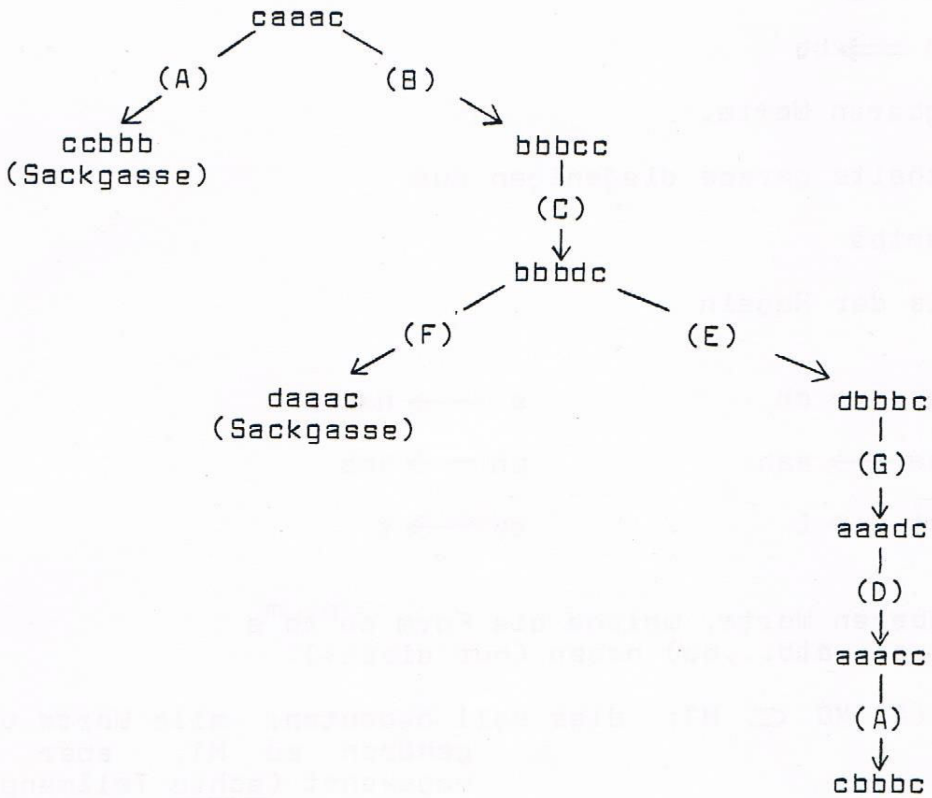
erzeugen.

Man gebe die Reihenfolge an, in der die Regeln dabei auftreten (in der Auflistung nur die jeweils erste Anwendung berücksichtigen).

****

Lösung: B, C, E, G, D, A

Erläuterung: Es geht darum, einen Weg durch ein "Labyrinth" zu finden, und zwar - etwas vereinfacht - das folgende:



c und d sind gewissermaßen "Läufer", welche über den "Untergrund" a bzw. b nach rechts oder links laufen und ihn dabei teilweise austauschen (Regeln A, B, E, und G), was wiederum Einfluß auf ihre mögliche "Laufrichtung" hat; die Regeln C und D erlauben es, unter gewissen Umständen c und d ineinander umzuwandeln.

****

Beispielaufgabe 7:

Sei M0 die Menge aller aus

satbs

mit Hilfe der Regeln

$a \Longrightarrow aa$

$b \Longrightarrow bb$

erzeugbaren Worte.

M1 enthalte gerade diejenigen aus

satbs

mittels der Regeln

$s \longrightarrow sh$	$s \longrightarrow hs$
$ha \longrightarrow aah$	$bh \longrightarrow hbb$
$ht \longrightarrow t$	$th \longrightarrow t$

erzeugbaren Worte, welche die Form sa^ntb^ms (d.h. sa...atb...bs) haben (nur diese!).

Gilt (A) M0 $\subset$ M1; dies soll bedeuten: alle Worte von M0 gehören zu M1, aber nicht umgekehrt (echte Teilmenge)

(B) M0 = M1

(C) M1 $\subset$ M0

oder (D) keine dieser Beziehungen?

****

Lösung: (B)

Erläuterung: Eine Anwendung von "$a \Longrightarrow aa$" verdoppelt die Anzahl der a, eine Anwendung von "$b \Longrightarrow bb$" die Anzahl der b, so daß M0 gerade die Worte der Form

a^ntb^m enthält,

wo $n=1,2,4,8,\ldots,$
$m=1,2,4,8,\ldots,$

d.h. n,m sind beliebige (eventuell verschiedene) Zweierpotenzen ($1=2^0$ sei hier ebenfalls als Zweierpotenz aufgefaßt).

Eine Verdoppelung der a in einem Wort der Gestalt

$$sa^n tb^n s$$

erhält man mithilfe des zweiten Regelsystems auf dem Wege

$sha^n tb^m s$ $\quad (s \Longrightarrow sh)$

$sa^{2n} htb^m s$ $\quad$ (n-mal Regel: $sa \Longrightarrow aah$)

$sa^{2n} tb^m s$ $\quad (ht \Longrightarrow t)$

Erst wenn solch ein "Zyklus" nach dem Muster einer (Programm-) Schleife durchlaufen ist, d.h. die Zahl der a verdoppelt worden ist, läßt sich das wieder eliminieren, womit man wieder bei einem Wort der Form "s...atb...bs" angelangt ist. Analog fährt ein "Zyklus" auf der Grundlage der Regeln "s $\longrightarrow$ hs" (am rechten Wortrand angewandt), "bh $\longrightarrow$ hbb" und "th $\longrightarrow$ t" zu einer Verdoppelung der b.

Anmerkung zur Aufgabenformulierung: Die etwas umständliche Definition von M1 läßt sich hier, wie in vielen ähnlichen Fällen vermeiden, wenn man als zusätzliche Zeichen Hilfszeichen, z.B. H, $H_1, H_2, \ldots$ einführt, welche in den Regeln und den Zwischenschritten von "Start-" und "Zielwort" vorkommen dürfen und genauso behandelt werden, wie die übrigen Zeichen. Aber: ein Wort wird als erzeugbar aus einem anderen nur dann bezeichnet, wenn es kein Hilfszeichen mehr enthält. Wir könnten in Regelsystem 2 jetzt h durch ein solches Hilfszeichen H ersetzen und M1 als die Menge aller damit aus "satbs" erzeugbaren Worte definieren.

Zusatzfrage 1:

Mit M2, M3 wollen wir die Menge all der Worte der Form "sa^ntb^ms" bezeichnen, welche sich aus "satbs" mithilfe der Regeln

$$s \longrightarrow sh \qquad s \longrightarrow hs$$

$$ha \longrightarrow aah \qquad bh \longrightarrow hbb$$

$$hth \longrightarrow t$$

bzw.

$$s \longrightarrow sh$$

$$ha \longrightarrow aah$$

$$ht \longrightarrow t$$

$$ht \longrightarrow th$$

$$hb \longrightarrow bbh$$

$$hs \longrightarrow s$$

erzeugen lassen.

Welches Verhältnis (im Sinne der obigen Beispielaufgabe) besteht zwischen M0, M2, M3?

Lösung: $M2 \subset M3 \subset M0$

Erläuterung:

M2 enthält alle Worte der Form

sa^ntb^ms,

wo n,m identische Zweierpotenzen sind (da aufgrund der Regel "hth $\longrightarrow$ t" "Zyklen" zur Verdoppelung der a bzw. b gewissermaßen nur "gekoppelt" durchgeführt werden können).

M3 enthält alle Worte der Form "sa^ntb^ms", wo n,m Zweierpotenzen sind und n größer oder gleich m ist. Die Verdoppelung der b erfolgt hier auf folgendem Wege

- ausgehend von sa^ntb^ms - :

$sha^ntb^ms \qquad (s \longrightarrow sh)$

$sa^{2n}htb^ms \qquad (ha \longrightarrow aah)$

$sa^{2n}thb^ms \qquad (ht \longrightarrow th)$

$sa^{2n}tb^{2m}hs \qquad (hb \longrightarrow bbh)$

$sa^{2n}tb^{2m}s \qquad (hs \longrightarrow s),$

und - im Prinzip - nur auf diesem, also: immer wenn alle b verdoppelt worden sind, so auch alle a.

Zusatzfrage 2:

In welchen der Mengen M0, M2, M3 kommen Worte "sa^ntb^ms" vor , in welchen das Verhältnis n:m gleich 1:4 ist? Man beantworte die gleiche Frage für das Verhältnis 2:3.

Antwort: 1:4 in M3
2:3 in keiner der Mengen
(Es kommen ja höchstens Verhältnisse von Zweierpotenzen vor, also 1:1, 1:2, 1:4, 1:8, ..., 2:1, 4:1, ...)

Eine Variante:

Man betrachte die Worte, welche aus

$a^3s(ab)^2sb^3$

mittels der Regeln

$a \Longrightarrow aa$

$b \Longrightarrow bb$

erzeugbar sind.

Angenommen, in einem solchen Wort betrage das Verhältnis der Anzahl derjenigen a, welche zwischen den beiden s stehen, zu der Anzahl derjenigen b, welche ebenfalls zwischen den beiden s stehen, 1:1.
In welchem Verhältnis steht dann die Gesamtzahl der a zu der Gesamtzahl der b?

(A) 1:1

(B) 3:2

(C) 2:3

(D) dies ist von Fall zu Fall verschieden

Antwort: (A)

Erläuterung:

Für das Startwort gilt: das Verhältnis der Anzahl der zwischen den s liegenden a zur Anzahl der zwischen den s liegenden b ist gleich dem Verhältnis der Gesamtzahl der a zur Gesamtzahl der b (nämlich 2:2 bzw 5:5, beides gleich 1:1).
Diese Eigenschaft bleibt bei Verdoppelung der a bzw. b (im Gesamtwort und damit auch zwischen den s) erhalten und kommt somit allen erzeugbaren Worten zu.
Ein anderer Zugang: Das Verhältnis 1:1 der Anzahl der zwischen den s liegenden a zur Anzahl der zwischen den s liegenden b kann nur auftreten, wenn die Regeln "a $\Longrightarrow$ aa","b $\Longrightarrow$ bb" gleich oft angewandt wurden (da es im Startwort bereits 1:1 beträgt).

(Eine letzte Zusatzfrage: Man überlege sich, was geschieht, wenn in den obigen Aufgaben h durch s ersetzt wird.)

*

Als vorletzte Aufgabe dieses Blocks von Beispielen wollen wir nun zum Vergleich eine einfache Aufgabe stellen, bei deren Bearbeitung"Lösungsstrategie 1" (aus den Erläuterungen zu Aufgabe 2) nützlich sein kann:

****

Aufgabe 8:

Welche zwei der folgenden Worte lassen sich aus

s

mithilfe der Regel

s $\longrightarrow$ asbsc

erzeugen:

(A) aasbbsbscc

(B) aasbasbsccbsc

(C) aasbscbasbscc

(D) asbasbcc

****

<u>Lösung:</u> (B) und (C)

<u>Bemerkung:</u> Die Nicht-Erzeugbarkeit von (A) und (D) ergibt sich auch aus Anzahlüberlegungen: Alle erzeugbaren Worte haben die gleiche Anzahl von a,b,c; ist diese Zahl gleich n, so sind n Regelanwendungen erfolgt und die Zahl der s ist gleich n+1. (Diese Kriterien sind aber nicht hinreichend(13)).

Spiegelung um b nicht völlig!
d.h. b muß in Mitte stehen

*

Wir beschließen diesen ersten Block von Beispielaufgaben mit einer weiteren verklausulierten Aufgabe zum Thema "Symmetrie": Zuvor eine neue Vereinbarung: Eine Regel der Form

"Zeichenreihe" $\longrightarrow$ •

bedeute: ein Teilwort der angegebenen Form kann fortgelassen werden; z.B. führt die Anwendung von

st $\longrightarrow$ •

auf "asta" zu "aa".(14)

----

(13) Es ist hier schwierig, explizit "einfache" strukturelle Merkmale zu benennen, welche zugleich auch notwendig sind (vgl. demgegenüber Abschnitt 1.5.6). Und dies, obwohl für diese Sprache im Sinne der Theorie der formalen Sprachen recht einfache Entscheidungsalgorithmen existieren (vgl. Fußnote 5 und Hopcroft & Ullman, 1979). Einer dieser Algorithmen beruht auf der Tatsache, daß unser Regelsystem einer sogenannten "beschränkten Grammatik" entspricht - d.h. jedes nach ihren Regeln ersetzbare Teilwort wird durch eine längere (oder gleichlange) Zeichenreihe substituiert (hier "s" durch "asbsc"): In solchen Fällen führt, grob gesagt, systematisches Erzeugen ("Lösungsstrategie 1" aus den Erläuterungen zu Aufgabe 2) stets zu einer Entscheidung, was einer aufmerksamen Vp vielleicht sogar auffallen wird. Es existieren - was uns aber nicht zu interessieren braucht - effizientere Algorithmen, da unser Regelsystem gleichzeitig einer "kontextfreien Grammatik" entspricht; derartige Klassifizierungen sind für uns hier jedoch nur von bedingtem Interesse.

(14) Diese Erweiterung unserer formalen Regelsprache ist naheliegend, sie ist hier aber vermeidbar, d.h. es läßt sich ohne weiteres eine ähnliche Aufgabe ohne solche Regeln konstruieren (vgl. Fay et al., 1982). Andererseits lassen sich eine Reihe "schöner Aufgaben" unter Einbeziehung solcher Regeln konstruieren.

****

Beispielaufgabe 9:

Man betrachte die Worte, welche sich aus

$$st$$

mittels der Regeln

$$s \longrightarrow asf_1$$

$$s \longrightarrow bsg_1$$

$$t \longrightarrow f_2ta$$

$$t \longrightarrow g_2tb$$

$$f_1f_2 \longrightarrow \bullet$$

$$g_1g_2 \longrightarrow \bullet$$

erzeugen lassen.

Welche der folgenden Zeichenreihen können dabei nie als Teilworte auftreten?:

(A) abbstabb

(B) abstba

(C) astaaa

(D) abasta

(E) aaastbbb

****

Lösung: (A) und (E)

Erläuterung: Ein Wort der Gestalt

W1 st W2,

wo W1 und W2 nur aus a und b zusammengesetzte Zeichenreihen seien, ist erzeugbar, wenn W2 durch Spiegelung aus W1 hervorgeht (und nur dann). Statt dies umständlich zu begründen, geben wir folgendes Beispiel:

Das Startwort

st

geht mittels "$s \longrightarrow asf_1$", und "$s \longrightarrow bsg_1$" z.B. über in

$aabsg_1f_1f_1t$,

oder, in der "Stapeldarstellung" aus den Erläuterungen zur Aufgabe 2 (hier je zwei "Stapel" für s und t):

	s	t	
b	g_1		
a	f_1		
a	f_1		
		noch "leer"	

Dieses Wort geht mittels "$t \longrightarrow f_2ta$", "$t \longrightarrow g_2sb$" z.B. über in

	s	t	
b	g_1	g_2	b
a	f_1	f_2	a
a	f_1	f_2	a
außen	innen		außen

(d.h. "$baasg_1f_1f_1f_2f_2g_2tbaa$")

Nun wenden wir in der Mitte von innen nach außen bzw. von unten nach oben "$f_1f_2 \longrightarrow \bullet$" , "$g_1g_2 \longrightarrow \bullet$" an. Ergebnis:

	s	t	
b			b
a			a
a			a

(d.h. "aabstbaa")

Die Reihenfolge der Schritte kann natürlich verändert werden, z.B.:

st

bsg_1t

bsg_1g_2tb

bstb

$basf_1t$ etc.

*****

1.3 Anhand dieser wenigen Beispiele zeigt sich vielleicht schon, daß sich bereits durch Bezug auf die beiden vorgestellten einfachen Regeltypen eine Vielzahl interessanter Probleme generieren lassen; die Möglichkeiten sind durch diese Beispiele natürlich bei weitem nicht erschöpft. ?

Im Mittelpunkt (von Was?) steht im allgemeinen die Menge aller aus einem Startwort erzeugbaren Worte (oder ein bestimmter Teil davon, z.B. in Aufgabe 7). Von Interesse sind dabei charakteristische strukturelle Merkmale dieser Worte, darunter solche eher qualitativer Art, wie

- Symmetrieeigenschaften (vgl. Aufgabe 2, 9)

- Ordnungseigenschaften (vgl. Aufgabe 3) Warum?

- "rhythmische" Eigenschaften (Perioden; vgl. Aufgabe 1)

- "Verschachtelungs"-Prinzipien (u.a. sprach-analoger Art; vgl. Aufgabe 8 Abschnitt 1.5.6)

ebenso, wie solche eher quantitativ-arithmetischer Art (z.B. Anzahlverhältnisse; vgl. Aufgabe 7).

Diese Merkmale können in verschiedenster Form vorliegen, sich auf das ganze Wort beziehen oder auf bestimmte Teile davon, und sich in vielfältiger Weise überlagern. Manche sind eher schwer, andere eher leicht identifizierbar; anhand "unscharfer Varianten" oder über "stochastisches" Überprüfen von Teilaspekten kann man sich häufig eine Groborientierung verschaffen.

Die Wortmerkmale können aus dem Regelsystem mal mehr mal weniger leicht ableitbar sein (man vergleiche z.B. die verschiedenen Regelsysteme in Aufgabe 7); oft wird man dazu Regelsystem und Startwort so konzipieren, daß es beispielsweise die Orientierung erlaubt

- an bestimmten Fixpunkten (wie z.B. s in Aufgabe 2 als Symmetrieachse, oder als "Membran/Begrenzungsmarkierung" in anderen Aufgaben) in Verbindung mit generierenden oder eliminierenden Regeln wie "s $\longrightarrow$ hsg", "s $\longrightarrow$ sf", "ts $\longrightarrow$ s" etc.

- an Symbolen, die bestimmte Teile eines Wortes durchlaufen, und es dabei unter Umständen transformieren, wie z.B. das c in Regeln wie "ca $\longrightarrow$ ac" ("Wandern"), "ca $\longrightarrow$ bc" oder "ca $\longrightarrow$ aac", etc. (wie es einige Aufgaben belegen).

Fundamental sind auch "Verwandlungsregeln" wie "a $\longrightarrow$ b", "a $\Longrightarrow$ b", "a $\Longrightarrow$ aa" etc.

Der Weg vom Start- zum Zielwort kann eindeutig bestimmt sein - vielleicht sogar determiniert sein (d.h. "unausweichlich" dahinführend) - oder nicht (eventuell nur eindeutig bis auf gewisse einfache Transformationen), er kann "direkt" sein oder "mehrstufig", eventuell "Zyklen" durchlaufen oder über "Umwege" führen.

Regelsysteme können ihrerseits strukturelle Merkmale aufweisen, wie z.B. gewisse "Symmetrien" oder "Verkettungen", welche zur Bildung von Metaregeln Anlaß geben können, die es erleichtern, die Wirkungsweise des Regelsystems und die Struktur der Menge der erzeugbaren Worte zu "durchschauen". (Dies haben wir uns implizit in einigen Erläuterungen zunutze gemacht; bei ungeübten Vpn besteht die Gefahr von Irrtümern durch falsche Metaregelbildungen.)

*

Der Abstraktionsgrad der Fragen kann auf vielfältige Weise abgestuft sein.
Zum einen können sie direkt auf die erzeugten Wortmengen zielen, z.B.

- indem einzelne Worte vorgegeben werden und gefragt wird, ob sie in der Menge direkt oder als Teilwort vorkommen (Grundtyp; sprachlich am wenigsten aufwendig; kann den Nachteil haben, daß schlichtes Probieren bereits zur Lösung führt - allerdings kann auch "Probieren" unter Umständen "intelligenten Strategien" folgen);

- indem direkt nach Merkmalen der erzeugbaren Worte gefragt wird (ein erstes Beispiel findet sich in Zusatzfrage 2 zu Aufgabe 7);

- indem indirekt nach deren Merkmalen gefragt wird, z.B. durch Vorgabe einer zweiten Wortmenge (vgl. z.B. Aufgabe 7; denkbar wäre auch der Vergleich mit der Schnitt- oder Differenzmenge zweier Wortmengen) oder über die Frage nach der Wirkung neuer Regeln auf die Worte dieser Menge (z.B.: "führen diese Regeln aus der Menge heraus oder nicht?"; ein einfaches Beispiel hierfür findet sich als Zusatzfrage 1 zu Aufgabe 3);

- indem nach Eigenschaften der Wortmengen insgesamt gefragt wird; hierunter fallen neben den zuletztgenannten Fragen allgemein Fragen nach der Abgeschlossenheit der Menge unter gewissen allgemeineren Operationen oder die nach der Anzahl von Worten darin mit gewissen Eigenschaften.

Es können aber auch die "Wege" (Pfade) eine Rolle spielen, welche von dem Startwort über die schrittweise Anwendung der Regeln durch die Menge der erzeugbaren Worte hindurchführen. Hier kann z.B. gefragt werden

- nach der Zahl der Schritte, die man bis zu einem gegebenen Zielwort benötigt (siehe z.B. Zusatzfrage samt Bemerkung zu Aufgabe 4);

- nach der Reihenfolge, in welcher dabei Regeln angewandt werden müssen (siehe Aufgabe 6);

- nach Worten, die "auf dem Wege liegen"(falls dieser eindeutig bestimmt ist);

- nach der Anzahl der Worte, welche sich in einer gegebenen Anzahl von Schritten erzeugen lassen (vgl. Zusatzfrage zu Aufgabe 2).

Eine Variante dieser Art von Fragestellung besteht darin, zu fragen, wie ein vorgegebenes Regelsystem ergänzt werden muß, damit ein Zielwort erreichbar wird (vgl. Aufgabe 4).

In diesem Zusammenhang sind auch abstraktere Fragen nach der Struktur des "Wegenetzes" denkbar, etwa die nach "Zyklen" (ein Wort W1 läßt sich in ein Wort W2 überführen und dies wieder in W1).

Eine weitere Abstraktionsstufe ergibt sich, wenn man auf die feste Vorgabe eines Startwortes verzichtet und nach dem Verhalten von Regelsystemen auf bestimmten Wortmengen fragt, was z.B. in Form eines Vergleiches zwischen verschiedenen Regelsystemen erfolgen kann.

*

Den verschiedenen inhaltlichen Spielarten der ABRESY-Aufgaben stehen eine Reihe formaler Varianten gegenüber. So kann z.B. die sprachliche Komplexität vom einfachen Grundtyp wie in Aufgabe 1 über die Einbeziehung von Indizes (wie z.B. in Aufgabe 5) oder die Einbeziehung als bekannt vorausgesetzter abstrakter Konzepte (wie z.B. in Aufgabe 7) bis zur Einbeziehung ad hoc definierter abstrakter Begriffe reichen. (s.u.)

*****

1.4 Die Komplexität von Regelsystemen der in den Abschnitten 1.1 und 1.2 vorgestellten Art läßt sich noch beträchtlich steigern. Sehr komplexe Aufgaben dieser Art können für bestimmte Anwendungen interessant sein (im Zusammenhang mit Untersuchungen zum komplexen Problemlöseverhalten etwa, zur Untersuchung des Transfers von Konzepten, welche anhand leichter Aufgaben gebildet oder geübt wurden oder für spezielle diagnostische Zwecke).

Wir wollen hier jedoch noch zwei - formal unabhängige - Variationsmöglichkeiten anhand einiger Beispielaufgaben vorstellen, welche unseres Erachtens für die Untersuchung höherer kognitiver Prozesse wie auch für diagnostische Zwecke von einigem Interesse sein könnten (da sie die Steigerung von Komplexität ohne Verlust an Transparenz ermöglichen): Zum einen das Einbeziehen abstrakter Arten der Fragestellungen, wie in Abschnitt 1.3 angedeutet, zum anderen die Einführung neuer, abstrakter Typen von Ersetzungsregeln bei entsprechender Erweiterung unseres Formalismus zur Beschreibung von Regelsystemen: hierzu führen wir Variablen ein, einen Operator, sowie Bedingungsgleichungen, welche die Anwendbarkeit der Regeln einschränken.

Die beiden Grundtypen von Regeln aus Abschnitt 1.1. werden im einzelnen wie folgt erweitert:

<u>Erweiterung 1</u>:

Es werden Variablen X, Y, Z (gegebenenfalls indiziert) eingeführt, für welche bei Anwendung der Regeln beliebige Zeichenreihen eingesetzt werden können.

<u>Beispiel</u>: Die Regel "aXbYa $\longrightarrow$ bXYaXYb" kann auf

aabbbaa

z.B. wie folgt angewandt werden

$a\underbrace{ab}_{X}b\underbrace{ba}_{Y}a$ geht über in $b\underbrace{ab}_{X}\underbrace{ba}_{Y}a\underbrace{ab}_{X}\underbrace{ba}_{Y}b$

$a\boxed{a\underbrace{bb}_{X}b\underbrace{a}_{Y}a}$ geht über in $a\boxed{b\underbrace{bb}_{X}\underbrace{a}_{Y}a\underbrace{bb}_{X}\underbrace{a}_{Y}b}$

<u>Erweiterung 2</u>:

Es wird eine Variable W eingeführt, welche im Anwendungsfall für das Gesamtwort steht (d.h. für dasjenige Wort, auf das die Regel angewandt werden soll):

<u>Beispiel</u>:

Die Regel

W $\longrightarrow$ WaW

führt bei Anwendung auf das Wort

cde

zum Wort

$$\underbrace{cde}_{W}\,a\,\underbrace{cde}_{W},$$

und dies ist die einzig mögliche Anwendung darauf.

<u>Erweiterung</u> <u>3</u>:

$\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$, $\overline{W}$ steht für die Spiegelung von X, Y, Z bzw. W (d.h. die Zeichen erscheinen in umgekehrter Reihenfolge).

<u>Beispiele</u>:

Die Regel

$$bXa\overline{X}b \longrightarrow b\overline{X}aXb$$

läßt sich anwenden auf

$$cb\,\underbrace{cd}_{X}\,a\,\underbrace{dc}_{\overline{X}}\,b$$

und führt zu

$$cb\,\underbrace{dc}_{\overline{X}}\,a\,\underbrace{cd}_{X}\,b.$$

Die Anwendung von $W \longrightarrow W\overline{W}$ auf cde führt zu cdeedc.

<u>Erweiterung</u> <u>4:</u>

Die Anwendung von Regeln (insbesondere solchen, welche Variablen gemäß "Erweiterung 1" enthalten) kann durch Bedingungsgleichungen wie

"$W = Xa\overline{X}$", oder "$X = \overline{X}$" (d.h. "X ist spiegelsymmetrisch")

eingeschränkt werden; sie werden der Regel in Klammern nachgestellt und müssen im Anwendungsfall erfüllt sein.

Beispiel:

Man betrachte die Regel

$$XaX \longrightarrow aXa \qquad (W = XaX,\ X=\overline{X})$$

und das Wort

cdcacdc.

Die Zerlegung $\underbrace{cdc}_{X}\,a\,\underbrace{cdc}_{X}$

genügt der Gleichung, also kann die Regel angewandt werden und führt zu

acdca.

Die Einteilung $cd\,\underbrace{c}_{X}\,a\,\underbrace{c}_{X}\,dc$ wäre hier ausgeschlossen,

da sie der Bedingung $W = XaX$ widerspricht.
Auf das Wort

cdacd

ist die Regel wiederum nicht anwendbar, da die Bedingung $X = \overline{X}$ verletzt werden müßte.(15)

----

(15) Es könnte interessant sein, hier auch andere relationale Beziehungen zwischen Zeichenreihen als die der Gleichheit in Betracht zu ziehen, z.B die (Äquivalenz-)Relation Z1~Z2 im Sinne von: Z1 und Z2 unterscheiden sich nur in der Reihenfolge der Zeichen, d.h. sie sind durch eine Permutation derselben ineinander überführbar.
Ebenso könnte "Erweiterung 3" ergänzt werden durch weitere Operatoren wie z.B. X^n mit n als Variable.

Zu "Erweiterung 2" sei angemerkt, daß man sich ohne Verluste darauf beschränken kann, W nur in Bedingungsgleichungen zuzulassen. Die Funktion dieser Variablen besteht nämlich im wesentlichen darin, die neue Möglichkeit zu schaffen, Regelanwendungen an Bedingungen zu knüpfen, welche - auf das ganze Wort bezogenen - globalen Charakter haben. Würde man auf diese Variable verzichten, so ließen sich die auf der Grundlage der übrigen drei Erweiterungen formulierbaren Regeln als Metaregeln oder Regelschemata auffassen, welche jeweils einer unendlichen Menge von Ersetzungsregeln alten Typs (nach 1.1) entsprechen.

****

Beispielaufgabe 10:

Seien M1 bis M5 die Mengen derjenigen Worte, welche aus "s" mithilfe der folgenden Regelsysteme (R_1 bis R_5) erzeugbar sind:

(R_1) $s \longrightarrow asa$

$a \Longrightarrow b$

(R_2) $W \longrightarrow aWa$

$W \longrightarrow bWb$

(R_3) $W \longrightarrow bWb$

$b \Longrightarrow a$

(R_4) $s \longrightarrow asa$

$aXa \longrightarrow bXb \quad (X = \overline{X})$

(R_5) $s \longrightarrow asa$

$W \longrightarrow bWb$

Man gebe an, in welchem Verhältnis die Mengen $M_1,\ldots,M_5$ zueinander stehen (vgl. Aufgabe 7).

****

Lösung: $M1 = M3 = M5 \subset M2 = M4$

Denn: M1, M3, M5 enthalten alle Worte W der Form

$W = b^n a^m s a^m b^n$,

M2 und M4 enthalten alle Worte W der Form

$W = Xs\overline{X}$

wo X für eine beliebige aus a und b zusammengesetzte Zeichenreihe steht.

****

Beispielaufgabe 11:

Man betrachte die aus

abcdefgh

mithilfe der Regeln

$XY \longrightarrow YX \quad (W = XY)$

erzeugbaren Worte.

Welche der folgenden Zeichenreihen können als Teilworte auftreten?

(A) gha

(B) ahg

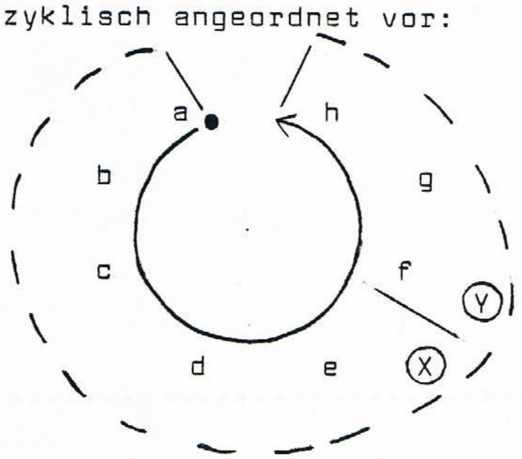
(C) gah

(D) hab

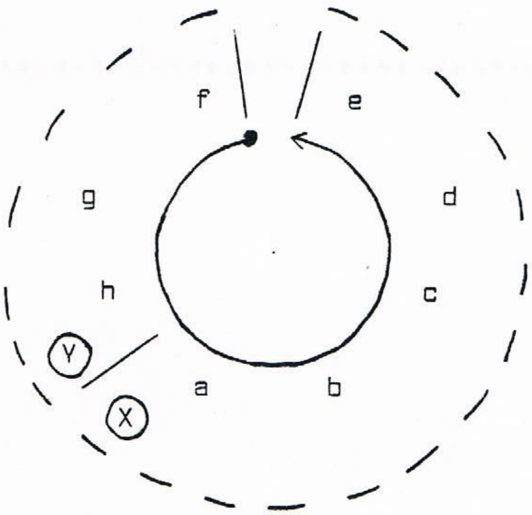
****

Lösung: (A) und (D)

Hinweis: Jede mehrfache Anwendung der Regel läßt sich zum einen durch eine einmalige Anwendung ersetzen, zum anderen durch mehrfache Anwendung der Regel, wo Y jeweils nur ein Zeichen umfaßt. Hierzu stelle man sich das Startwort beispielsweise zyklisch angeordnet vor:



Eine Einteilung in X,Y - etwa die oben verzeichnete - und Anwendung der Regel führt zu einem zyklischen Tausch der Buchstaben in Pfeilrichtung, im obigen Beispiel z.B. zu



<u>Beispielaufgabe</u> <u>12</u>: (eingekleidete Arithmetikaufgabe)

Betrachten Sie die Regelsysteme

(R_1) $W \longrightarrow WWW$

$Xaaa \longrightarrow X \quad (W = Xaaa)$

(R_2) $W \longrightarrow WAAA$

$Xaaa \longrightarrow X \quad (W = Xaaa)$

Welche der folgenden Worte haben die Eigenschaften, daß sich daraus mit R_1 die gleichen Worte ableiten lassen wie mit R_2

(A) b^6

(B) a^6

(C) a^2

(D) a^5

(E) a^9

(F) $(ab)^3$

Lösung: (B) und (E)

Denn: die gleichen Worte lassen sich gerade erzeugen aus den (Start-)Worten der Form

$$a^{3n} \quad (n=1,2,\dots)$$

Zum ersten ist klar, daß Worte mit der gewünschten Eigenschaft z.B. kein b enthalten dürfen, da (R_1) die Zahl der b zu vermehren gestattet, (R_2) nicht.
Identifiziert man nun Worte der Form

$$a^n$$

mit n, so entsprechen den beiden Regelsystemen die arithmetischen Operationen

$n \longmapsto 3n$ (" $\longmapsto$ " steht für: geht über in)

$n \longmapsto n-3$

für R_1, bzw.

$n \longmapsto n+3$

$n \longmapsto n-3$

für R_2. Der Rest ist elementare Zahlentheorie. Die Aufgabe ließe sich wohl auch ohne diesen Transfer (explizite Übersetzung in ein arithmetisches Problem) lösen.

****

Beispielaufgabe 13: (genau genommen vier Aufgaben gleichen Fragetyps)

Welche der folgenden Regeln haben die Eigenschaft, daß sie jedes spiegelsymmetrische Wort (d.h. jedes Wort W mit W = W) wieder in ein solches überführen?

(A) f $\Longrightarrow$ fgf

(B) hgh $\longrightarrow$ fgf

(C) W $\longrightarrow$ WW

(D) XX $\longrightarrow$ X (W = XX)

****

Lösung: (A), (C), (D)

Beachte zu (D): Hat ein symmetrisches Wort W die Form XX, so hat es eine gerade Zahl von Buchstaben und muß aufgrund der Symmetrie gleichzeitig identisch sein mit $X\overline{X}$. Es folgt, daß $X = \overline{X}$.

****

Beispielaufgabe 14: (abstrakte Fragestellung mit Bezug auf die Grundregeln nach 1.1)

Welche der folgenden Regelsysteme haben die Eigenschaft, daß sich mit ihrer Hilfe aus jedem Wort (auf das mindestens eine Regel anwendbar ist) exakt ein "Endwort" erzeugen läßt (soll heißen: Ein Wort, auf das sich keine der Regeln mehr anwenden läßt)?

(A) fg $\longrightarrow$ gf

(B) fg $\longrightarrow$ i

gh $\longrightarrow$ i

(C) fg $\longrightarrow$ i

hg $\longrightarrow$ i

****

Lösung: (A) und (C)

****

Beispielaufgabe 15:

Welche der folgenden Regelsysteme sind "zyklisch" (was bedeuten soll: läßt sich aus einem Wort W1 ein Wort W2 erzeugen, so aus W2 stets auch W1)?

(A) f $\Longrightarrow$ g

(B) fg $\longrightarrow$ hi

i $\longrightarrow$ f

g $\longrightarrow$ f

(C) fg $\longrightarrow$ hi

hi $\longrightarrow$ fg

(D) XYX $\longrightarrow$ YXY (W = XYX)

****

Lösung: (C) und (D)

Man beachte zu (A) Bemerkung b) zur Erläuterung der Lösung von Aufgabe 3.

****

Beispielaufgabe 16:

Wir wollen sagen, zwei Wörter W1, W2 seien mithilfe gewisser Regeln aus einem Wort W0 ähnlich erzeugbar, wenn es möglich ist, W1 und W2 aus W0 so zu erzeugen, daß dabei die gleichen Regeln benutzt werden und jede dieser Regeln gleich oft; lediglich die Reihenfolge der Anwendung dieser Regeln darf sich unterscheiden.

Welche der folgenden Regelsysteme haben die Eigenschaft, daß je zwei aus "f" mit ihrer Hilfe ähnlich erzeugbare Worte W1, W2 die Eigenschaft haben, daß jeder Buchstabe in W1 genauso oft vorkommt wie in W2?

(A) $s \longrightarrow sa$, $a \Longrightarrow b$

(B) $s \longrightarrow asa$, $s \longrightarrow bsb$

(C) $s \longrightarrow as$, $as \longrightarrow sb$

****

Lösung: (B) und (C)

*****

1.5 Zum Schluß dieses ersten Teils des Berichts wollen wir noch eine Reihe formaler und experimenteller Varianten des Aufgabentyps ABRESY mehr oder weniger skizzenhaft und unsystematisch vorstellen. Wir hoffen, daß unsere These von der Flexibilität dieses Aufgabentyps hierdurch noch plastischer wird. Die zu Anfang von Abschnitt 1 gemachten Vorbemerkungen zum exemplarischen Charakter unserer Ausführungen behalten auch hier ihre Gültigkeit.

In den Abschnitten 1.5.1 und 1.5.2 werden wir uns zusätzlichen Erweiterungen des Regelapparates bzw. einigen der denkbaren Modalitäten der Regelanwendung widmen, in Abschnitt 1.5.3 Modifikationen unseres Ausgangsmaterials: den Zeichenreihen (Stichwort: mehrdimensionale Anordnungen von Zeichen). In Abschnitt 1.5.4 wenden wir uns von der Betrachtung der Regelsysteme vorübergehend ab und direkten Fragen nach formalen Merkmalen von Zeichenreihen zu, woraus sich ganz andere Fragetypen ergeben (teilweise in Anlehnung an klassische Aufgabentypen etwa mit Bezug auf Zahlen); diese liefern den Anstoß zur Entwicklung entsprechender neuer Fragetypen mit Bezug auf Regelsysteme. Letzteren wird Abschnitt 1.5.5 gewidmet sein, gefolgt von Überlegungen zur Rolle gewisser äußerer Merkmale der Präsentation der Aufgaben (z.B. zum Einfluß, den die konkrete Auswahl der Zeichen, aus denen die Worte gebildet werden, auf die Strukturierung der Aufgabe durch die Vpn haben dürfte). Wir beschließen unseren kleinen "Rundumschlag" mit Überlegungen zur Einbeziehung von Möglichkeiten, die sich im Rahmen eines interaktiven Dialoges "Mensch - Computer" ergeben.

*

1.5.1 Wie wir bereits im Abschnitt 1.4 demonstriert haben, lassen sich die beiden Grundtypen von Ersetzungsregeln auf verschiedene Arten ergänzen.
Dies kann geschehen, indem man Zusatzregeln ad hoc umgangssprachlich in einzelne Aufgaben einführt (die Regel "$w \longrightarrow \overline{w}$" ließe sich z.B. als "Spiegelungsregel" einführen: man darf die Reihenfolge der Zeichen - bezogen auf das Gesamtwort - umkehren).
Man kann aber auch, wie wir dies in 1.4 getan haben, den Formalismus zur Beschreibung von Regeln entsprechend erweitern. Die dort vorgestellten Erweiterungen ließen sich natürlich "verfeinern", z.B. durch Einbeziehung von Variablen für Einzelzeichen ($x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n$ etc.) und Schreibweisen wie "$x_1\ldots x_n$" o.ä. für Zeichenreihen (womit - allerdings nicht so eindeutig wie bisher - z.B. eine komplexe Regel wie

$$x_1\ldots x_n y_1\ldots y_n \qquad x_1 y_1\ldots x_n y_n$$

formulierbar würde (16), oder durch die Einführung neuer Operatoren (vgl. Fußnote (15)).

----

(16) Diese Regel ließe sich mithilfe der üblichen lokalen Regeln etwas umständlich simulieren (obige Regel müßte daraus dann zunächst als eine Art Metaregel "herausdestilliert" werden, was einer erheblichen Erhöhung der Komplexität gleichkäme).

Reizvoll erscheinen uns die Möglichkeiten, die sich ergeben, wenn man den in 1.4 eingeführten Regelapparat durch die Einführung von Variablen V, V_1,... bereichert, welche für weitere aus dem gleichen Startwort erzeugbare Worte stehen (im Grenzfall also W selbst; sie können rechts vom Pfeil oder in Bedingungsgleichungen auftreten). Im Falle der Regelanwendung dürfen dafür beliebige erzeugbare Worte eingesetzt werden. Eine solche Regel wäre

$$W \longrightarrow aWbVc;$$

mit Hilfe dieser Regel ließen sich beispielsweise aus dem Startwort "S" die gleichen Worte erzeugen wie mit der ganz andersartigen Regel aus Beispielaufgabe 8 (mit obiger Regel werden die Worte quasi von "innen nach außen" aufgebaut, mit jener Regel von "außen nach innen"; daraus ergeben sich interessante Möglichkeiten zum Vergleich von Regelsystemen). Der wesentliche Unterschied zum bisherigen Worterzeugungskonzept besteht darin, daß der bisherige Weg vom Start- zum Zielwort immer linear war; nun können auch Verzweigungen vorkommen.

*

1.5.2 Jede Regel der beiden Grundtypen aus Abschnitt 1.1 läßt sich ohne weitere Bedingungen anwenden (sofern nur entsprechende Teilworte vorhanden sind). Bedingungsgleichungen, wie sie in Abschnitt 1.4 eingeführt wurden, lassen bereits eine konditionale Steuerung der Regelanwendung zu, indem sie das Gegebensein gewisser struktureller Merkmale des Ausgangsworts zur Bedingung für die Anwendbarkeit der betreffenden Regeln machen. Auch hier könnten wir fallweise weitere Anwendungsrestriktionen umgangssprachlich einführen oder aber unser analytisch-formalsprachliches Instrumentarium zum Benennen von Wortmerkmalen systematisch erweitern (vgl. 1.5.4) und so das Repertoire zur Formulierung von Bedingungen in "Erweiterung 4" aus 1.4 ergänzen.
Eine solche Restriktion könnte z.B. darin bestehen, zu fordern, daß gewisse Zeichenreihen vor/nach Anwendung der Regel(n) nicht als Teilworte auftreten dürfen.(17)

Es sind hier noch andere Variationen denkbar, z.B. solche, welche die Reihenfolge der Regelanwendung regulieren. So könnten z.B. mehrere Regeln periodisch (z.B. zwei immer abwechselnd) anzuwenden sein. Oder es könnten "mehrstufige" Regelsysteme in Betracht gezogen werden, d.h. man gibt Regelsysteme R1,R2,... vor und verlangt, daß die Regeln von R1 vor denen aus R2 angewandt werden usw. (d.h. man erzeugt zuerst ein Wort mittels R1, wendet darauf Regelsystem 2 an usw.; die Verwendung von Hilfssymbolen - vgl. Anmerkung zu Aufgabe 7 - kann hier sehr wesentlich sein).

Allgemeinere "Steuerungsmöglichkeiten" - welche insbesondere die beiden gerade genannten Spezialfälle einschließen - läßt die folgende reizvolle aber anspruchsvolle Variante zu:

----
(17) Derartige Restriktionen wären z.B. von Bedeutung, wenn man eine ABRESY-Version des "Turm von Hanoi"-Problems bequem formulieren wollte.

Man wendet Regelpaare auf Wortpaare an (oder Regeltripel auf Worttripel, etc.), d.h. man gibt Einzelregeln R1,R2,... und R1',R2',.... vor (wie gehabt) und bündelt diese - z.B. tabellarisch - zu Paaren: (R1,R1'),....: auf ein Paar (W,W') von Worten ist ein Regelpaar (Ri,Ri') genau dann anwendbar, wenn Ri auf W und Ri' auf W' anwendbar ist; die Anwendung der Regel (Ri,Ri') auf (W,W') erfolgt dann komponentenweise. Es ist dann klar, was es bedeutet, daß ein Wortpaar aus einem anderen vermittels dieses Systems von Regelpaaren erzeugbar ist.

Eine interessante Wendung erfährt nun dieses Konzept durch folgende Vereinbarung: wir sagen, ein Wort W1 sei aus einem Wort W0 über ein Wort W0' erzeugbar, wenn ein Paar von Worten aus (W0,W0') erzeugbar ist, dessen erste Komponente W1 ist; die zweite Komponente bezeichnen wir als einen "Begleiter" von W1.

(W

Interpretation: W0' "steuert" über die Kopplung der Regeln Ri und Ri' die sukzessive Anwendung der ersteren auf W0.
Auch der Begleiter kann interessant sein, z.B., wenn man R1',R2',... und W0' so wählt, daß der Begleiter eine Art "Protokoll" über die Anwendung der Regeln Ri enthält (was standardisierte Fragen zum Weg von W0 nach W1 mittels R1,R2,..., erlaubt (vgl. Abschnitt 1.3)).
Eine der vielen Fragemöglichkeiten: Wie muß W0' gewählt werden, damit W1 aus W0 über W0' erzeugbar ist (oder: gibt es überhaupt ein solches W0', oder: wie sieht bei vorgegebenem W0 der Begleiter aus)? Wir wollen jedoch der Versuchung widerstehen, dieses Konzept, welches seinerseits verschiedene Varianten zuläßt, hier durch konkrete Beispiele zu illustrieren.

Weitere Ideen: "⟹"-Regeln können "gekoppelt" werden (d.h. will man eine von ihnen anwenden, so müssen die anderen - soweit anwendbar - simultan mit angewandt werden); oder: die Stelle in einem Wort, an welcher eine "⟶"-Regel angewandt wird kann spezifiziert werden (z.B. "die am weitesten links stehende").

*

1.5.3 Das Material unserer "abstrakten Spiele" besteht aus Zeichenreihen, d.h. eindimensionale orientierte (diskrete) Systeme von Zeichen. Es kann sinnvoll sein, auch hier Variationen vorzunehmen.

"Nach unten", indem man z.B. die Reihenfolge der Zeichen für unwesentlich erklärt und somit den Ordnungsaspekt von Zeichenreihen "weg-abstrahiert" (d.h. nur die Häufigkeit, mit der ein Zeichen auftritt, zählt; anders aufgefaßt: es wird die Regel "beliebige Permutation der Zeichen" als Sonderregel hinzugenommen).(17)

----

siehe S. 43 !

(17) Eine weniger radikale Variante bestünde darin, zu gestatten, die Reihenfolge der Zeichen umzukehren (Spiegelung): dies erhält die Eindimensionalität, gibt aber die Orientierung auf. Eine noch weitergehende Abstraktion würde umgekehrt zum Konzept der endlichen Symbolmenge führen.

Zum anderen kann man die Eindimensionalität der Verkettung der Zeichen überwinden, indem man z.B. zu (gerichteten) "Graphen" (im Sinne der mathematischen Graphentheorie) übergeht (18), hier realisiert durch Symbole, welche durch Pfeile verbunden sind (wir wählen der Einfachheit halber wieder " $\longrightarrow$ "); z.B.

$a \longrightarrow b \longrightarrow c$ (entspräche abc)

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & & a \arrow[dr] & \\ a \arrow[r] & b \arrow[ur] \arrow[dr] & & a \\ & & b \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

oder

$$\begin{tikzcd} a \arrow[rr] & & b \arrow[dl] \\ & c \arrow[ul] & \end{tikzcd}$$.

Interessant - vor allem mit Hinblick auf die Untersuchung der visuellen Anteile beim Lösen solcher Aufgaben - dürfte die hiermit gegebene räumliche Zweidimensionalität solcher Gebilde sein.
Einfacher könnte man hier auch mit Tableaus der Art

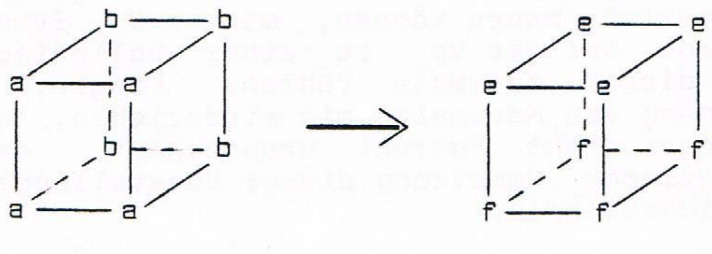
```
        | | |
  - - - a-d-g- - -
        | | |
  - - - b-f-h- - -
        | | |
  - - - c-f-i- - -
        | | |
```

arbeiten und z.B. Regeln wie

$$\begin{matrix} a & b \\ b & a \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} b & a \\ a & b \end{matrix} \ .(19)$$

Hier sind etliche Variationen denkbar (z.B. Dreiecks- oder Sechsecksnetze).

Auch eine dreidimensionale Variante auf der Basis eines imaginierten (potentiell unendlichen) Würfelgitters ist möglich mit Regeln wie



Anwendungsfall: RUBIK's Cube

*

----

(18) Man könnte auch ungerichtete Graphen wählen: also nur "——" ohne Orientierung statt " $\longrightarrow$ ", oder verschiedene Arten von Pfeilen (markierte Graphen): in diesem Rahmen ließe sich z.B. eine Art "künstlicher Chemie" realisieren.

(19) Dabei wäre ein Zeichen, z.B. " • ", für Leerstellen, sowie Variablen x_1, x_2 ... für Einzelzeichen sinnvoll. /x–

1.5.4. Im Mittelpunkt unserer bisherigen Aufgabenstellungen stand der "dynamische Aspekt" der Transformation von Zeichenreihen nach Regeln. Das Herausfinden gewisser struktureller Merkmale der Worte, welche in dem jeweiligen Zusammenhang eine Rolle spielen, wurde entweder über die Aufgabenstellung ausdrücklich gefordert, oder spielte im Rahmen der von uns intuitiv skizzierten "Lösungsstrategie" eine Rolle (etwa das Entdecken gewisser Invarianzen unter Regelanwendung).
Man kann natürlich - vorher oder nachher - auch unmittelbar auf Eigenschaften von Worten ohne einen solchen regelhaft-dynamischen Aspekt bezugnehmen (dies liefert eventuell interessante zusätzliche Ansatzpunkte für vergleichende Experimente).

Solche Eigenschaften könnten implizit ins Spiel kommen oder explizit.(20)

Implizit etwa, indem man einige Worte vorgibt, von denen alle bis auf eines ein "offensichtliches gemeinsames Merkmal" aufweisen: das "abweichende" Wort soll benannt werden.(21)

Explizit könnten sie in umgangssprachlicher oder formalsprachlicher Art angesprochen werden. Letzteres erfordert die Einführung eines besonderen Formalismus (in Abhängigkeit von den jeweils ins Auge gefaßten Merkmalen - was leicht eine Vorstrukturierung der Aufmerksamkeit der Vpn zur Folge haben kann).

Ein solcher Formalismus könnte z.B. auf Bedingungsgleichungen (wie in Abschnitt 1.4. vorgestellt) zurückgreifen; von Fall zu Fall können zusätzliche formale Elemente (eventuell auch in
|ä Tabellenform) hinzukommen, welche sich z.B. auf die Lünge und Zusammensetzung von Worten/Teilworten beziehen (welche Zeichen kommen - höchstens/mindestens - vor, wie häufig oder in welchem Häufigkeitsverhältnis, welcher Anordnung, welchen Gruppierungen und Kontexten etc.).

----

(20) Die indirekte Charakterisierung von Worten und Wortmerkmalen (welche - nebenbei erwähnt - für sich genommen bereits "dynamische Aspekte" haben können, wie z.B. Symmetrie) über Regelsysteme kann bei der Vp zu einer holistisch-bildhaften Repräsentation dieser Merkmale führen; Fragen, welche die explizite Benennung von Merkmalen mit einbeziehen, können diese Ebene allerdings nicht "direkt ansprechen", da sie eine sprachlich-analytische Umsetzung dieser Vorstellungen erfordern (Vergleichsmöglichkeiten!).

|ga (21) Dies ist ein Aufgbentyp, welcher seiner Natur nach - im Gegensatz zu allen bisherigen - nicht mehr mathematisch exakt nachvollziehbar ist, was bei experimentellen Untersuchungen zwar zu berücksichtigen ist, jedoch keinen entscheidenden Einwand darstellt.
Varianten: "Wort 1 : Wort 2 wie Wort 3 : ...?"; oder - mit implizitem Bezug auf quantitative Merkmale -: "Wort A : n wie Wort W_i : n_i", wobei eine Liste solcher Paare $W_1, n_1; \dots ; W_k, n_k$ vorgegeben wird und zu A die "passende Zahl" n bestimmt werden soll (Stichwort "Analogien").

Es können nun Merkmale vorgegeben werden, verbunden mit der Aufforderung, ein Wort anzugeben, welches diese Merkmale aufweist.
Oder umgekehrt: Wortmengen sollen durch Merkmale charakterisiert werden; es werden z.B. zwei Blöcke von Worten vorgegeben, verbunden mit der Aufforderung, Merkmale (evtl. bestimmter Art) anzugeben, welche auf alle Worte des ersten, aber auf keines des zweiten Blocks zutreffen.

Beide Aufgabentypen wären wohl am interessantesten als "kreative" Aufgaben, d.h. in Form offener Fragen ohne Lösungsvorschläge.(22)

Varianten dieser Experimente könnten - unter Bezugnahme auf elementare Worte/Merkmale - auch auf Reaktionszeitbasis von Interesse sein (etwa Vorgabe zweier Worte und eines Merkmals, welches einem der Worte zuzuordnen ist).

Zum Schluß sei noch angesprochen, daß auch Fragen "deduktiver Natur" gestellt werden könnten, etwa: "hat jedes Wort mit Eigenschaften $E_1,...,E_n$ auch Eigenschaft E?"

*

1.5.5 In den bisherigen - auf Regelsysteme bezogenen - Beispielaufgaben, gaben wir gewöhnlich ein oder mehrere Regelsysteme vor, welche wir - meistens mit Bezug auf ein Startwort - "befragten".(23)
Durch Übertrgung von Ideen des letzten Abschnitts (1.5.4) auf Regelsysteme lassen sich auch hier andere Fragetypen konzipieren.

Etwa: Zu gegebenen Regel-Eigenschaften (wie die Erhaltung gewisser Wortmerkmale; vgl. z.B. Aufgabe 13 mit Hinblick auf Symmetrie) werden Regeln einer gewissen Form gesucht, welche diese haben.
Oder: es werden einige Wortpaare vorgegeben, zu denen eine Regel gesucht wird, welche das jeweils erste Wort eines jeden Wortpaars in das zweite zu überführen gestattet.

----
(22) Die Kontrolle der Lösungen wäre hier natürlich am leichtesten auf formalsprachlicher Basis mit Hinblick auf ein entsprechendes EDV-Prüfprogramm - vorzugsweise im direkten Dialog mit dem Rechner.

(23) Eine verfeinerte Terminologie zum Beschreiben von Wortmerkmalen erlaubt auch in diesem Rahmen neue Fragemuster: Zu gegebenem Regelsystem und Startwort(en) soll z.B. ein erzeugbares Wort mit bestimmten Eigenschaften angegeben oder schrittweise erzeugt werden (offene Frageform). (Im ersten Fall könnten zwecks Kontrolle der Lösung unter Umständen Entscheidungsalgorithmen aus der Theorie der formalen Sprachen herangezogen werden.)

Oder es wird implizit auf Regeln bezuggenommen, indem eine Liste W1,W2,... von Worten vorgegeben wird, welche durch schrittweise Anwendung einer nichtgenannten Regel auseinander hervorgehen (W2 aus W1, W3 aus W2 etc.); man soll ein Wort angeben, welches diese Liste "sinnvoll" fortsetzt (vgl. hierzu auch Abschnitt 1.5.7; dieser Aufgabentyp entspricht analogen Aufgaben mit Bezug auf Zahlenreihen in gängigen Intelligenztestes).(24)(25)

*

1.5.6 Die Aufgaben aus 1.2 und 1.4 legen es nahe, die Vpn zeitlich nicht zu sehr einzuschränken und mit Hilfsmitteln wie Stift und Papier auszustatten. Derartige Modalitüten lassen sich - in Abhängigkeit von der Art der Aufgabenstellung und mit Hinblick auf die jeweiligen Untersuchungsziele - wie üblich variieren, worauf wir nicht näher eingehen wollen (für diagnostische Zwecke wären z.B. unter Bezugnahme auf einfache Aufgaben auch Speed-Tests denkbar).

lä

Auch auf die mit der sprachlichen Komplexität der Aufgabenstellung zusammenhängenden Aspekte wollen wir nicht näher eingehen - wir haben dieses Thema ganz kurz in Abschnitt 1.3 gestreift.

Auf ein Merkmal der Aufgabenpräsentation jedoch, welches wir in Abschnitt 1.1 beiläufig angesprochen haben, wollen wir hier kurz eingehen: es ist dies die Auswahl der Zeichen und die Darstellung der Zeichenreihen. Es ist zu erwarten, daß dies die Bearbeitung

----

(24) Es kann auch ein Regelsystem zugrundegelegt werden oder gar subtilere Regelhaftigkeiten, die nicht mehr durch ein Regelsystem der hier vorgestellten Art erfaßbar sind oder ein solches überlagern, indem sie die "Feinstruktur" seiner Anwendung bestimmen (z.B. die Auswahl der Stellen, an denen Ersetzungen vorgenommen werden, oder den "Rhythmus", d.h. die Aufeinanderfolge ihrer Anwendung).
Die Fähigkeit einer Vp, die jeweilige Regelhaftigkeit (ohne explizite Vorgabe eines Rahmens, in welchem sie zu erwarten ist) zu erkennen, wird hier - vielleicht noch mehr, als dies für die meisten der hier angedeuteten Experimente sowieso schon gilt - "kontextabhängig" sein, d.h. insbesondere beinflußt von den Erfahrungen mit vorangegangenen ABRESY-Problemen, da damit zu rechnen ist, daß diese spezifische Wissens- und Erwartungsstrukturen produzieren.

lü
lee

(25) Derart konstruierte Wortlisten erlauben noch eine Reihe weiterer Anwendungen:
Man verändert z.B. die Reihenfolge der Worte und läßt sie "regelgerecht" ordnen (wobei eine Regel explizit vorgegeben wird oder nicht); oder man gibt zunächst kurzzeitig eine solche (korrekt geordnete) Liste vor und nennt nachher eine Regel mit der Frage, ob diese Regel die Folge im obigen Sinne "erzeugt"; auf Reaktionszeitbasis kann zur passenden Zuordnung einer einfachen Regel zu einer von zwei Wortlisten aufgefordert werden; oder eine solche Liste soll - bei vorgegebenem Startwort aus dem Gedächtnis reproduziert werden; etc.

eines Teils der Aufgaben mehr oder weniger stark beeinflussen wird, auch wenn ihr "abstrakter Gehalt" davon unberührt bleibt.

Wir haben uns hier für die Verwendung (kleiner) lateinischer Buchstaben entschieden und dieses Konzept erweitert durch die fallweise Hinzunahme von Ziffern als Indizes.
Die konkrete Auswahl der Buchstaben bzw. Indizes, sowie die Verwendung strukturierender und quantifizierender Notationen wie z.B. Z^n kann hier bereits einen entscheidenden Einfluß haben: es werden hierdurch entscheidende "Strukturierungshilfen" (oder auch -"Obstruktionen") möglich, etwa durch Nahelegung gewisser Heuristiken (wie z.B. durch die aufsteigende Indizierung der g_i in Aufgabe 3). → Vorwissenseffekte

Beeinflußt werden sowohl die "Wortstrukturierung" durch die Vp als auch die "Metaregelbildung" (in diesem Zusammenhang ist auch die Reihenfolge/Gruppierung, in welcher die Regeln dargeboten werden, zu berücksichtigen).

Deutlich wird dies auch, wenn man alternativ die Verwendung einfacher geometrischer Figuren in Betracht zieht, durch welche Wort-/Regelsysteme zudem an "Anschaulichkeit" gewinnen können (ansatzweise ist dies z.B. in den Erläuterungen zu Aufgabe 2 geschehen), oder Symbole verwendet, welche aus bestimmten anderen Zusammenhängen vertraut sind; man ersetze in Aufgabe 8 z.B. einmal "s" durch "x", "b" durch "+" sowie "a" und "c" durch "(" bzw. ")"; dies ergibt erzeugbare Ausdrücke wie

$$((x+(x+x))+x).$$

Ganz allgemein dürfte sich die äußere Gestalt der Zeichen als nicht unwesentlich erweisen in Hinblick auf spezifische visuelle Anteile an der Problemverarbeitung - z.T. bereits auf unteren Ebenen derselben (mit Hinblick auf "Symmetrieerkennung" z.B., ob die verwendeten Buchstaben oder geometrischen Zeichen in sich symmetrisch sind oder nicht). Hier sind verschiedene weitere Variationen denkbar wie z.B. "auf den Kopf gestellte" Buchstaben oder Farbstreifen.

Aufgrund der Asymmetrie der für das Lesen wesentlichen visuellen Prozesse (Stichwort: "Phonetischer Kode") wird auch die Dimension "links - rechts" im Aufbau von Worten und mit Hinblick auf bestimmte Aspekte der Wirkungsweise von Regelsystemen eine Rolle spielen (z.B. die "Laufrichtung" gewisser Symbole; was geschieht, wenn links und rechts vertauscht werden? (26)).

Worte könnten auch vertikal repräsentiert werden oder z.B., bei Verwendung von geeigneten geometrischen Figuren, ineinander-

----

(26) Zu untersuchen wären auch die Effekte einer "zeitlichen Spiegelung" von Regelsystemen (unter Beschränkung auf Regeln vom Typ 1 aus 1.1): d.h. man vertauscht jeweils die Zeichenreihen "vor und hinter dem Pfeil", sowie die Rollen von Start- und Zielwort.
→ dies erfolgt in manchen Programmiersprachen als Zuweisungsbefehl $x = a+b+d$ ...

geschachtelt (27).

Da die "Geometrie" unserer Zeichenreihen von diskreter Art ist, eine "Bauklötzchen-Geometrie" gewissermaßen, könnte man auch an eine konkrete Realisierung durch Kombination einfacher physikalischer Gegenstände denken.

Ganz anders geartet wären "sinnhafte" Einkleidungen (mit - unter Umständen - wiederum eigenen heuristischen "Zusatzeffekten").(28)

In diesem Zusammenhang zu berücksichtigen ist auch die Interdependenz von nacheinander gestellten Aufgaben; diese kann unter Umständen durch die Auswahl geeigneter Zeichen geschwächt oder verstärkt werden (letzteres beispielsweise, indem gleiche oder verwandte Zeichen in den Regelsystemen verschiedener Aufgaben "vergleichbare Rollen" spielen - vgl. Abschnitt 1.3).

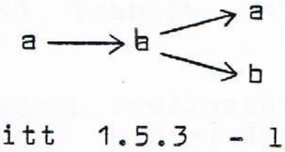
*

1.5.7 Die soeben angesprochene mögliche Wechselwirkung der Aufgaben ließe sich - bei geschickter Vernetzung - beispielsweise dazu verwenden, gezielt Lernprozesse, welche mit dem Lösen derartiger Aufgaben verbunden sind und zum Aufbau spezifischer Wissensstrukturen führen, zu untersuchen. Das Netz der Aufgaben könnte flexibel sein, so daß fallweise in Abhängigkeit von den jeweiligen Antworten der Vpn ein anderer Weg durch den Aufgabenpool gewählt wird. Auch feedbacks und Lernhilfen sind denkbar, welche gezielt sprachlich-analytisch (z.B. unter Verwendung von Konzepten, wie sie in Abschnitt 1.5.4 angesprochen werden) oder "raum-zeitlich-veranschaulichend" (u.a. unter Berücksichtigung der Überlegungen aus Abschnitt 1.5.6) ausgerichtet sein können. All dies ließe sich wohl am ehesten im Rahmen eines Mensch-Computer-Dialogs realisieren.

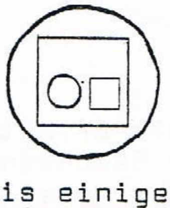
Auch einige spezielle Fragetypen können durch einen solchen Dialog neue Aspekte gewinnen; so zum Beispiel die in 1.5.5

----

(27) Ein Graph wie



- vgl. Abschnitt 1.5.3 - ließe sich beispielsweise wie folgt darstellen:



(28) Auf der Basis einiger der vorangestellten Varianten ließen sich z.B. formale Regelsysteme konzipieren, welchen in künstlich-konkreter Einkleidung die "Käferzuchtprobleme" nach Putz-Osterloh (1974) entsprächen.

vorgestellte Aufgabe, Wortlisten "regel-gerecht" fortzusetzen: hier könnte der Computer die vorgegebene Liste bei Bedarf so lange sukzessive verlängern, bis der Vp "ein Licht aufgeht".

Wir wollen unsere Überlegungen zu formalen Spielarten des Aufgabentyps ABRESY abschließen mit der Skizze einer spielerischen Version eines solchen Dialoges, welche zum Teil an die Überlegungen zum "impliziten Regelgebrauch" aus Abschnitt 1.5.5 anknüpft:
Die Vpn und der Computer stehen sich in den Rollen von Proponent (P) und Opponent (O) gegenüber. Beiden ist jeweils ein (verschiedenes) Regelsystem zugeordnet (wobei der Informationsstand von P in Bezug auf das Regelsystem von O von völliger Unkenntnis bis zur vollständigen Information reichen kann).
Der Proponent bekommt nun ein Startwort vorgegeben, von dem aus er sich mithilfe seines Regelsystems zu einem ebenfalls vorgegebenen Zielwort "vorkämpfen" soll, dabei behindert durch den Opponenten, welcher dem mithilfe "seiner" Regeln entgegenwirkt (es geht also u.a. darum, das Regelsystem des Opponenten zu identifizieren und die möglichen Wechselwirkungen der beiden Regelsysteme zu überblicken, um so eine Strategie zu finden, welche durch den Opponenten möglichst wenig gestört wird oder dessen "Verhaltensweisen" sogar ausnutzt).

Dieses Spiel läßt sich auf verschiedene Weise "dynamisieren":

- Es kann auf die Vorgabe eines festen Zielwortes verzichtet werden; stattdessen werden Wortmerkmale vorgegeben (vgl. 1.5.4), von denen z.B. "möglichst viele" realisiert werden sollen. Zusätzlich oder alternativ können "fatale" Wortmerkmale eingeführt werden, welche nie auftreten dürfen.

- Das Kontingent der Regeln auf beiden Seiten kann sich im Laufe des Spiels verändern, eventuell in Abhängigkeit von den "Zügen" des Proponenten. Es könnten ihm auch gelegentlich zwei zusätzliche Regeln vorgeschlagen werden, von denen er sich eine auswählen kann (oder es wird die Hinzunahme je einer neuen Regel für P und O vorgeschlagen, was abgelehnt oder akzeptiert werden kann).

- Ein Zeitfaktor (Streß!) kann dadurch ins Spiel gebracht werden, daß O nach Ablauf einer gewissen Zeit jeweils wieder "am Zuge" ist, auch, wenn P noch nicht "gezogen" hat.

- Regeln (oder bestimmten Situationen) können "Kosten" zugeordnet werden, welche bei Anwendung durch P (bzw. bei ihrem Eintreten) zu dessen Lasten veranschlagt werden (29); P hat die Aufgabe, mit einem gewissen "Budget" auszukommen.

- Das Verhalten von O wird - eventuell in Abhängigkeit von dem des Proponenten - probabilistisch gesteuert.

----

(29) Diese "Kosten"-Bewertung von Regeln könnte auch in anderen Zusammenhängen zu schönen Fragestellungen führen; sie stellt in gewisser Hinsicht einen Spezialfall der in 1.5.2 vorgestellten Technik dar, mit Wort- und Regelpaaren zu arbeiten.

Chunk!

- Der Vp wird die Gelegenheit gegeben, die Situation klarer zu strukturieren, indem sie bestimmte Zeichenreihen abkürzen (umbenenennen) und kleine Metaregeln aus den vorgegebenen "programmieren" kann (welche dann als eine Regel gelten); ihr kann auch die Möglichkeit zu "Experimenten" gegeben werden, um das Verhalten des Opponenten zu "erforschen" (Kosten!).
- Die Rolle des Proponenten kann auf mehrere Vpn verteilt werden, wobei die Modalitäten der Kooperation vielfältig variiert werden können.

Damit glauben wir, Möglichkeiten aufgezeigt zu haben, einen Bogen zu spannen zwischen den an der Bearbeitung einfacher Problemstellungen beteiligten vergleichsweise gut isolierbaren kognitiven Subprozesse und Prozessen, die beim komplexen Problemlösen eine Rolle spielen.

Dem stimme ich voll und ganz zu: Möglichkeiten wurden reichlich aufgezeigt

***
*****
***

2. Die folgenden Abschnitte beschreiben einige Problembereiche der Untersuchung menschlicher Informationsverarbeitung, in denen sich durch den Einsatz von ABRESY neue entscheidende experimentelle Befunde erhoffen lassen. Auswahl wie Darstellung sind weitgehend unsystematisch und die Schwerpunktsetzung folgt unseren theoretischen Vorlieben. Besonderes Gewicht kommt hierbei räumlich-anschaulichen Repräsentationen und Lösungsprozessen zu. Der Aufgabentyp ABRESY erlaubt indes, über diesen Aspekt hinaus - wie zu Anfang angesprochen - all die psychologischen Prozesse zu studieren, welche mit induktiven Inferenzen, Deduktionen, Analogien, Transfer von Metawissen und dem Erwerb und der Anwendung quantitativer Konzepte zusammenhängen, was wir durch dieses "Portrait" deutlich zu machen gehofft haben.

2.1 Modulare Organisation des visuellen Systems, interne Repräsentation und Kodierung

Eine auffallende Eigenschaft des menschlichen visuellen Systems ist seine modulare Organisation (Marr, 1982).Diese wird neurophysiologisch in parallelen Verarbeitungskanälen für verschiedene Funktionen deutlich und zeigt sich in korrespondierender Weise psychophysikalisch in der Zerlegbarkeit der visuellen Informationsverarbeitung in unabhängige Subprozesse, die erst auf jeweils höheren Verarbeitungsebenen aggregiert werden.

Neurophysiologisch lassen verschiedene Ganglienzellen mit unterschiedlicher Empfindlichkeit für Zeit- und Raumfrequenzen und unterschiedlicher spektraler Selektivität die Verbindung zwischen Retina und Cortex als ein System paralleler Kanäle erscheinen, die jeweils für bestimmte Sehfunktionen verantwortlich sind (e.g. Lennie, 1980). Die in hohem Maße selektiven funktionalen Eigenschaften von Zellen des visuellen Cortex und die Spezifität der anatomischen Verbindungen in ihm (e.g. van Essen, 1979) legen es nahe, seine interne topographische und funktionale Organisation als eine modulare zu abstrahieren. Das heißt, daß die für die verschiedenen Funktionen des Sehens benötigten Informationen bis zu einer bestimmten Verarbeitungsstufe getrennt behandelt werden. So lassen sich physiologisch wie anatomisch Einheiten isolieren, die als Modul für die Objekterkennung (e.g. Ungerleider & Mishkin, 1982), Modul für die räumliche Lokalisation von Objekten (e.g. Schneider, 1969), Modul für Helligkeits- und Flächenkontraste etc. bezeichnet werden können. Erst auf einer sehr hohen Stufe der Reizverarbeitung sind entscheidende Interaktionen zwischen den visuellen Modulen feststellbar, und eine Zusammenführung mit Informationen aus anderen Sinnesmodalitäten erfolgt erst - auch dies eine Eigenart des visuellen Systems von Primaten - auf noch höherer Verarbeitungsebene.

Auf psychophysikalischer Ebene zeigt sich der modulare Aufbau darin, daß die modularen Einheiten durch geeignete Wahl des Reizmaterials (2) isolierbar sind und sich so in ihren Gesetzmäßigkeiten untersuchen lassen (e.g. Marr, 1982; Uttal, 1982). Als Beipiele seien die Juleszschen "random dot"-Stereogramme, der McCollough-Effekt und der Land-Effekt genannt. ? Γ2'
Der modulare Charakter zeigt sich auch darin, daß auf unterschiedlich hohen Stufen der Informationsverarbeitung unterschiedliche "levels of equivalence" (Finke, 1980) bestehen, d.h. funktionale Äquivalenzen ansonsten separierbarer Verarbeitungsprozesse. Wir werden hierauf im Zusammenhang mit dem Problem des "mental imagery" zurückkommen.

---------- Wo im Text?

(30) Die modularen Komponenten des Wahrnehmungsapparates können entgegen einer Gibsonschen Auffassung nicht ausschließlich unter natürlichen Sehbedingungen studiert werden. Vielmehr zeigen sich charakteristische Eigenschaften erst, wenn sie weitgehend aus dem Verbund mit anderen Einheiten gelöst werden und so ihre internen Restriktionen offenbaren. Eine anorthoskopische Reizsituation entlarvt sozusagen die innere Mechanik. Die ABRESY-Aufgaben stellen in analoger Weise "anorthoskopische" Problemstellungen dar. "Ökologisch valide" soll jedoch auch hierbei nicht das "Handwerkszeug" einer Untersuchung sein, sondern die psychologischen Prozesse, die sich mit seiner Hilfe in theoretisch fruchtbarer Weise studieren lassen.

Auf höherer Ebene, im Schnittbereich perzeptueller und kognitiver Komponenten, zeigen sich Hinweise auf einen modularen Aufbau in der reichhaltigen empirischen Evidenz für funktional unabhängige Repräsentationssysteme und Kodierungsmechanismen. Im besonderen Befunde aus der Gedächtnisforschung weisen auf zwei unterschiedliche Symbolsysteme hin, die zur Kodierung, Organisation und Verarbeitung von Informationen verwendet werden: ein linguistisches und ein bildhaftes, quasi-perzeptuelles Symbolsystem (e.g. Paivio, 1978), die durch unterschiedliches Reizmaterial in unterschiedlicher Weise aktiviert werden, die auf verschiedenen Verarbeitungsebenen miteinander korrespondieren oder zu einem abstrakten interlingualem Kode zur gemeinsamen Verarbeitung verbaler und nicht verbaler Informationen aggregiert
T31 werden.(31)

Shepard (e.g. Shepard & Cooper, 1981) hat geeignetes Reizmaterial und experimentelle Bedingungen entwickelt, um introspektive Beobachtungen mit testbaren Verhaltensrestriktionen zu verknüpfen und so die Beteiligung bildhafter, analoger Symbolsysteme an der Lösung bestimmter Aufgabentypen zu demonstrieren. Vom Standpunkt einer modularen Betrachtungsweise, die in diesen höheren Bereichen des perzeptuell-kognitiven Systems freilich noch spekulativ ist, können die mit dem Shepard-Paradigma studierten funktionalen Einheiten als Transformationsmodule aufgefaßt werden. Solche

----

(31) Mit dieser Abstraktion verschiedener Repräsentationssysteme ist eine heftig geführte - von philosophischen und sprachanalytischen Betrachtungen bis zu formalen Analysen aus dem Bereich der Theorien künstlicher Intelligenz reichende - Kontroverse verbunden (e.g. Block, 1981). Von den Vertretern einer als linguistisch, propositional oder diskret bezeichneten Repräsentation wird dabei die Nützlichkeit des Begriffs "mental image" als explanatorisches Konstrukt bestritten, von den Proponenten einer als bildhaft, holistisch oder analog bezeichneten Kodierung wird hingegen ein solches Konstrukt als unverzichtbar zur Erklärung experimenteller Befunde erachtet. Diese Kontroverse führte - insbesondere durch die Kritiken Pylyshyns (e.g. 1981) zur Klärung zahlreicher begrifflicher Konfusionen, die mit der naiven Vorstellung eines mentalen Bildes und der Möglichkeit analoger Repräsentation verknüpft sind. Als abstrakte Modellbildungen erscheinen heute beide Perspektiven gleichermaßen vertretbar, da sie in ihren gegenwärtigen Ausarbeitungen frei sind von einem bestimmten ontologischen oder neurophysiologischen "commitment". Als inhaltliche Theorien hingegen sind sie über a priori Betrachtungen hinaus nach ihrem empirischen Inhalt, das heißt u.a. nach ihren testbaren Restriktionen zu bewerten. Vom empirischen Standpunkt muß die Beteiligung beider Arten von Kodierung angenommen werden. Eine Präzisierung möglicher formaler Modellbildungen zu Arten der Repräsentation und Kodierung ist durch die vergleichsweise neue mathematische Kodierungstheorie (van Lint, 1981) zu erwarten, eine Eingrenzung empirisch möglicher Modellbildungen ergibt sich aus der Notwendigkeit, diese konsistent mit neurophysiologischen Kodierungsmechanismen (e.g. Antis, 1975) zu halten.

funktionalen Einheiten oder "Input"-Systeme sind zwischen die "Transducer"-Systeme, welche die Reizinformation in geeignete neurale Signale übersetzen, und zentrale Verarbeitungseinheiten geschaltet und zeichnen sich durch spezifische Eigenschaften aus (s. Fodor, 1983), die weder den mehr peripheren noch den höheren, kognitiven Verarbeitungseinheiten zukommen. Aufgabe der Input-Systeme ist es, afferente Informationen zu interpretieren und zentrale Prozesse verfügbar zu machen. Sowohl perzeptuelle wie linguistische Mechanismen können zu Input-Systemen beitragen, und diese bestimmen jeweils das "Format" (Kosslyn, 1981), das für die benötigten Prozesse am geeignetsten erscheint. Die Ergebnisse von Shepard und Mitarbeitern deuten darauf hin, daß die Transformation räumlicher Information als ein solches Input-System aufgefaßt werden kann. Dabei ist die afferente Information für die räumliche Repräsentation nicht notwendig retinalen Ursprungs, sondern kann durch linguistische oder - wie im Fall angeborener Blindheit - durch haptische Mechanismen bereitgestellt werden (Carpenter & Eisenberg, 1978). Ein dergestalt modalitätenübergreifender räumlicher Repräsentationsmodul, der selbst wiederum funktional untergliedert ist, führt auf höherer Organisationsebene zur "cognitive map" oder sensu Gibson zu einer Umgebungsrepräsentation. Welches die für bestimmte Reizkonfigurationen und Aufgaben geeignete interne Repräsentation oder Transformation ist, wird von höheren Stufen des Verarbeitungssystems entschieden; diese Transformationen können unter den internen Restriktionen des Systems durchgeführt werden, unabhängig von der Art des Input zu diesem System.

Vom Standpunkt einer modularen Betrachtungsweise aus müßten also die funktionalen Einheiten zur Ausführung räumlicher Transformationen auch durch nicht-figurales Reizmaterial aktivierbar sein. Damit wird eine Ebene des visuellen Verarbeitungssystems postuliert, auf der es für visuell wahrgenommene und "mental imaginierte" Reizkonfigurationen eine funktionale Äquivalenz im Sinne von Finke (1980) gibt. Daß ein primär im Dienste des visuellen Systems stehender Modul für räumliche Transformationen an höheren kognitiven Verarbeitungsprozessen beteiligt ist, läßt sich sowohl durch die genannten experimentellen Befunde wie auch durch evolutionsbiologische Argumente begründen(e.g. Shepard, 1981; Marr, 1982).

Wir haben damit die theoretische Perspektive skizziert, aus der wir eine Untersuchung der beiden folgenden Fragen für wichtig erachten: Welche Art von nicht-figuralem Reimaterial, speziell welcher Typ von ABRESY-Aufgaben macht die Isolierung von Lösungssubprozessen möglich, die auf solche funktionale Einheiten für räumliche Transformationen zugreifen? Diese Frage steht im Kontext der Untersuchung räumlich visueller Prozesse bei der Lösung abstrakter, nicht-figuraler Denkaufgaben. 1

Die zweite Frage zielt auf individuelle Unterschiede in dem Ausmaß, in dem auf einer bestimmten kognitiven Verarbeitungsstufe funktionale Einheiten aktiviert werden, die zugleich höhere Verarbeitungseinheiten des visuellen Systems sind. Können insbesondere bei der Bearbeitung mathematischer Problemstellungen analytische von räumlich-bildhaften Denktypen unterschieden werden? Bei der Untersuchung beider Fragen läßt die Verwendung von Aufgaben des ABRESY-Typs Aufschlüsse erwarten. 2

2.2 Räumlich-holistische Prozesse bei der Lösung abstrakter Denkaufgaben

Eine interessante Kontroverse ist im Zusammenhang mit einem linguistischen, jedoch konkreten Aufgabentyp entstanden, mit den sog. "three term series problems". Diese bestehen aus zwei einfachen, konkreten Propositionen, eine konkrete relationale Beziehung enthaltend, und einer Frage nach einer sich daraus per Schlußfolgerung ergebenden weiteren Beziehung.(32)

Solche sog. linearen Syllogismen sind jedoch keine reinen Deduktionen, da eine Reihe impliziter Voraussetzungen in der geforderten sprachlichen Abstraktion verborgen sind.

DeSoto, London und Handel (1965) hatten gezeigt, daß Vpn bestimmten nichträumlichen Dimensionen in relationalen Aussagen eine imaginäre räumliche Orientierung geben. Huttenlocher (1968) erklärte die, durch die Latenzzeit definierte, variierende Schwierigkeit der von ihr gewählten linearen Syllogismen ("Tom is taller than Sam","John is shorter than Sam. Who is tallest?") durch unterschiedliche relationale Terme in den Prämissen, die unterschiedliche imaginierte räumliche Anordnungen nahelegen. Dieser "imagery theory" stellte Clark (1969) seine "linguistic theory" gegenüber, die Variationen in der Schwierigkeit der linearen Syllogismen durch drei psycholinguistische Prinzipien erklärte. Für bestimmte relationale Terme machen beide Theorien die gleichen Vorhersagen. Die Natur des Aufgabenmaterials impliziert jedoch, daß psycholinguistischen Prozessen des Sprachverständnisses und semantischer Repräsentationen eine dominierende Rolle bei der Problemlösung zukommen muß. Für andere Formen linearer Syllogismen führen dann auch die Prinzipien der "linguistischen Theorie" zu einer besseren Übereinstimmung mit den empririschen Daten als die "Bildtheorie" (Wason & Johnson-Laird, 1972; Jones, 1970; Clark, 1971).

Mit Hilfe dieses Aufgabentyps linearer Syllogismen wurden Aufschlüsse zu einer Reihe wichtiger theoretischer Fragen zur Kodierung, Speicherung und Verarbeitung einfacher relationaler Informationen erhofft, speziell zu Verschränkungen linguistischer und

----

(32) Bereits der nachmalige Bonner Ordinarius G. Störring (1908) hatte "angeregt durch einige Streitfragen der Logiker" eine experimentell-psychologische Untersuchung auf Reaktionszeitbasis unternommen, um zu prüfen, ob sich "alles Schließen an der Hand räumlicher Anschauungen vollziehe" oder ob es durch eine linguistische "Synthese der Gedanken der Prämissen" vermittelt sei. Das von ihm verwendete Aufgabenmaterial bestand aus dreigliedrigen linearen Syllogismen, die sich von den genannten "three term series problems" vor allem dahingehend unterschieden, daß Störring "nicht mit bestimmten Begriffen operierte, sondern mit Buchstabengrößen." Dies ist für eine Isolierung beteiligter Verarbeitungsprozesse unserer Auffassung nach ein Vorteil gegenüber den "three term series problems". Doch während Störring noch mit konkreten relationalen Beziehungen arbeitete, rekurrieren die Aufgaben des Typs ABRESY nicht auf vorstrukturierte semantische Felder.

räumlicher Prozesse auf verschiedenen Stufen der Verarbeitung (Sternberg, 1980), zur Bildung von Metakomponenten (Sternberg, 1983) bei wiederholter Bearbeitung ähnlicher Aufgaben sowie zur Entwicklung transitiven schlußfolgernden Denkens bei Kindern (Piaget, 1928: Keating & Caramazza, 1975; Trabasso, 1975). Dieser Aufgabentyp lag daher zahlreichen Studien zur Untersuchung räumlich-holistischen Denkens bei nicht-figuralem Aufgabenmaterial zugrunde (e.g. Potts & Scholz, 1975; Quinton & Fellows, 1975; Shaver, Pierson & Lang, 1974; Lawson, 1977).
Der Aufgabentyp ABRESY erlaubt nun, in entwicklungspsychologischen Anwendungen geeignete Aufgabenformen konkret ("Bauklötzchen") oder in konkreter Symbolik (geometrische Zeichen) vorzugeben, in kognitionspsychologischen Anwendungen ermöglicht er die mit psycholinguistischen Prozessen zusammenhängenden Probleme zu vermeiden.

So läßt sich durch ihn eine Isolierung der von Huttenlocher(1968) postulierten räumlichen Lösungsstrategien erhoffen. Entsprechend der Isolation peripherer Sehmodule durch geeignetes anorthoskopisches Reizmaterial ist auch auf dieser komplexeren kognitiven Verarbeitungsebene die Entwicklung von Aufgabenmaterial notwendig, das in erster Annäherung ein weitestgehend separiertes Studium der internen Verarbeitungscharakteristika funktionaler Einheiten gestattet und zugleich eine Verbindung zum komplexen Problemlösen ermöglicht. Dies konnte aus den genannten Gründen von den "three term serial problems" nicht geleistet werden.

Die experimentellen Standardparadigmata der Latenzzeitmessung, die bereits Störring (1908) seinen Analysen zugrunde gelegt hatte, und der Vergleich von Fehlerraten können bei Verwendung von ABRESY-Aufgaben mit anderen experimentellen Anordnungen verknüpft werden. Wir skizzieren an dieser Stelle nur einige mögliche Untersuchungsformen.

A. "Wortidentifikation". Der Vp wird zunächst ein Regelsystem vorgegeben, beispielsweise

$$S \longrightarrow TST$$

$$S \longrightarrow HSH$$

$$S \longrightarrow MSM$$

mit der Instruktion, eine möglichst deutliche Anschauung für dieses Regelsystem und die Eigenschaften der hiermit erzeugbaren Worte zu entwickeln. (Die Zeit, die die Vp hierzu benötigt, kann ein Modellparameter sein.) Alsdann werden Worte dargeboten, und die Vp hat jeweils anzugeben, ob ein solches Wort erzeugbar ist oder nicht. Beispielsweise

THTHSTHTH , HFHFMSMFHFH.

Wird ein höherer, räumlicher Kode gebildet, ist in beiden Fällen eine deutliche kürzere Reaktionszeit zu erwarten als bei einem propositionalen "Abarbeiten" der Regeln, wobei die Reaktionszeit für das erste Wort - da hier das Entdecken einer Verletzung ausreicht - wiederum deutlich kürzer sein müßte als die für das zweite Wort. Verschiedene Regelsysteme werden nun in unterschiedlicher Weise die Verwendung des einen oder anderen Kodes induzieren.

Variationen dieser Vorgehensweise sind etwa eine tachistoskopische Darbietung kurzer Wörter, z.B. T G S T G , T G S G T, oder eine Verwendung von geometrischen Zeichen oder abstrakten Symbolen anstelle von Buchstaben. Somit kann für gleich aufgebaute Aufgaben untersucht werden, ob bei Buchstaben ein zusätzlicher "phonetischer" Kode gebildet wird. Zudem läßt sich wiederum für gleiche Regelsysteme der Lösungstransfer für verschiedene Symbolisierungsformen untersuchen, der bei bildhafter Kodierung ~~als~~ besser ~~zu erwarten~~ ist als bei einer propositionalen Kodierung. Da eine holistische Verarbeitung eine geeignete Gruppierung der Zeichen voraussetzt (vergl. Beispielaufgabe 1, Regel $CA \longrightarrow CABCA$ gruppiert als $CA \longrightarrow CA\,\underline{BCA}$ oder als $CA \longrightarrow C\,\underline{ABC}\,A$.) kann durch Wahl der Symbole die präattentive Bildung perzeptueller Einheiten (e.g. Kahnemann & Henik, 1981) variiert werden. Die Verwendung von Worten, die sich sowohl aus Buchstaben wie aus abstrakten Symbolen zusammensetzen, kann auf der einen Seite die Bildung eines einheitlichen Kodes, auf dem höhere Verarbeitungsprozesse operieren könnnen, erschweren, andererseits können geometrische Zeichen mit gemeinsamen Eigenschaften eine solche Bildung erleichtern.

+ erwartungsgemäß

Die Verwendung farbiger Zeichen in Regelsystemen mit versteckten Symmetrien, verbunden mit dem Hinweis, daß farbige Zeichen Symmetrien markieren, kann zudem zum Studium präattentiver Prozesse (e.g. Treisman & Gelade, 1980) dienen. Die perzeptuellen Eindrücke, die weiterverarbeitet werden, können so durch präattentive Prozesse vor der Aufgabendarbietung festgelegt werden.

B. "Wortklassifikation"

Zwei Regelsysteme werden vorgegeben, die sich in bestimmten "geometrischen" Eigenschaften überlappen. Die Vp soll dargebotene Worte danach klassifizieren, ob sie zu dem einen Regelsystem, dem anderen oder zu beiden gehören. Die Erkennungszeit wird auch hier wieder bestimmt sein durch die Art des verwendeten Kodes.

C. "Selektive Interferenz"

Zur Bestimmung der Art der internen Repräsentation, können die Verarbeitungseinheiten, die zur Transformation quasi-visueller Bilder angesprochen werden, durch geeignete Aufgaben blockiert werden. Solche Interferenzen sind verstärkt bei den Aufgabentypen zu erwarten, die geometrische Bearbeitungsstrategien nahelegen.

Ein möglicher Versuchsaufbau hierzu wäre, der Vp eine Seite der Schlauchfiguren aus dem Test von Stumpf & Fay (1983) darzubieten mit der Aufgabe, sich die Ansicht für eine spätere Identifikation einer der anderen Würfelseiten zu merken. In der Zwischenzeit hat die Vp nach einer der aufgeführten Versuchsanordnungen eine ABRESY-Aufgabe zu bearbeiten.
Durch Variationen der Art der verwendeten Aufgaben, der Aufgabenstellungen, Instruktionen und Kontextbedingungen läßt sich so u.a. das Operieren in dem von einem Regelsystem definierten und von der Vp abstrakt-geometrisch imaginierten Raum der erzeugbaren Worte untersuchen.

Es bestehen freilich einige grundsätzliche Unterschiede zu Shepards Untersuchungen eines räumlichen Transformationsmoduls; der wichtigste ist, daß das Shepardsche Reizmaterial zu einer

Vgl. RESTLE 1970 Psychol. Review 77

natürlichen bildhaften Repräsentation führt, d.h. zu einem "Simulationsmodus", während die Denkprozesse zur Lösung von ABRESY-Aufgaben als zu einem "Notationsmodus" (Kosslyn, 1980) führend angesehen werden können, bei dem ein "mental image" zur Repräsentation nicht-bildhafter Entitäten verwendet wird. Die Wahl einer geeigneten abstrakt- bildhaften Repräsentation bedeutet ein zusätzliches Problem. Im Notationsmodus spielen also abstrakte Kodes aus höheren, kognitiven Verarbeitungsebenen eine wichtige Rolle. Der Eindruck bildhafter Verarbeitung ist selbst bereits Resultat höherer Verarbeitungsprozesse. (Diese ließen sich spekulativ als "top down inputs" in einen visuellen Transformationsmodell auffassen.)

Doch sind die häufig hinter alltagssprachlichen Wendungen verborgenen begrifflichen Schwierigkeiten zu gravierend, als daß man auf eine einfache Lösung dieser Probleme hoffen könnte: Eine Theorie über räumlich-bildhafte Prozesse - wie immer diese auch zu präzisieren seien - bei der Lösung abstrakter Probleme wird nicht bereits durch Verwendung eines Kontruktes "mental image" konstituiert. Vielmehr sind interne Beschränkungen eines bildhaften Repräsentationssystems anzugeben, dessen Theorie die Attribute "räumlich" bzw. "bildlich" nicht als metaphorische Umschreibung interner Zustände auffaßt, sondern als Beschreibungen eines Verarbeitungsprozesses, der testbare Verhaltensrestriktionen impliziert.

2.3 Komponenten mathematischer Fähigkeit: räumliche vs. formalistische Denktypen

Abstrakt-bildhaftem Denken scheint auf den höchsten und fruchtbarsten Stufen schöpferisch-wissenschaftlicher Tätigkeit eine einzigartige Bedeutung zuzukommen: In der Wissenschaftsgeschichte findet sich reichhaltiges Material, in dem Wissenschaftler ihre Denkstile in Begriffen eines inneren, bildhaften Sehens schildern (für Beispiele s. Hadamard, 1945; Shepard, 1978). Für viele Probleme der Naturwissenschaften könnte man die Bildung einer solchen inneren Anschauung als naheliegend ansehen; die Neigung zur Verknüpfung von räumlich-anschaulicher und linguistischer-formaler Denkform auf einem hohen, abstrakten Niveau und die Tendenz, diese "Technik" auch auf wissenschaftliche Bereiche zu übertragen, welche nicht von vorneherein "geometrischer Natur" sind, könnte ein zentraler Untersuchungsgegenstand einer Psychologie der Denkvorgänge sein. H d

Die psychologischen Untersuchungen zu mathematischen Denkprozessen haben sich bislang auf psychometrische Studien zu mehr oder weniger itemspezifischen Komponenten (e.g. Furneaux & Rees, 1978) oder auf den Erwerb mathematischer Konzepte im Kindes- und Jugendalter beschränkt (e.g. Lesh & Landau, 1983). (33)

Die wenigen Untersuchungen zu kognitiven Prozessen (e.g. Paige & Simon, 1966; Sternberg, 1977) beziehen sich auf elementarste mathematische Operationen und Konzepte.

----

(33) für eine detaillierte Bibliographie siehe Kilpatrick & Wagner (1983)

Die Daten vorliegender Studien (e.g. Lean & Clements, 1981) legen für die vergleichsweise elementaren Problemstellungen eine Klassifikation von Lösungsprozessen nahe, die sich mit den intuitiven Beobachtungen von Mathematikern in höheren Bereichen der Mathematik (e.g. Brieskorn, 1974) deckt: Paige & Simon (1966) unterscheiden "physical vs. verbal problem- solvers" (p. 177), wobei Vpn mit höherer räumlicher Anschauungsfähigkeit unabhängig von ihren verbalen Fähigkeiten dazu tendieren, besser algebraische, in Worte gekleidete Probleme, korrekt umzusetzen als Vpn mit geringerer räumlicher Anschauungsfähigkeit. Eine ähnliche Unterscheidung in einen analytischen vs. geometrischen Denktyp trifft Krutetskii (1976). Letzterer Denktyp verfügt in verstärktem Ausmaß über die Fähigkeit, mathematische Beziehungen zu visualisieren, d.h. sie visuell zu interpretieren, während der analytische Denktyp bei nur schwacher Beteiligung visuell-bildhafter Vorstellungen vorrangig verbal-logisch mit abstrakten Schemata operiert.

Die Aufgaben vom Typ ABRESY können nun herangezogen werden, um individuelle Unterschiede in dieser "geometrischen" Komponente mathematischer Fähigkeit zu untersuchen. (34) Die Erzeugung bildhafter Vorstellungen abstrakter Beziehungen setzt den Erwerb abstrakter Metakomponenten des Wissens (z.B. Erkennen von Symmetrien) voraus. Per Aufgabenkonstruktion lassen sich die Möglichkeiten, solches Metawissen zu erwerben, variieren.
Da ABRESY-Aufgaben mit festgelegten Eigenschaften, jedoch unterschiedlicher Schwierigkeit in Form einer interaktiven Computerversion dargeboten werden können, ist es möglich, diagnostische Indizes für das Ausmaß der Beteiligung räumlich-holistischer Prozesse zu gewinnen.

wo sind hier die Maße für Schwierigkeit bzw. Parameter

***

Der Versuch, eine bildhaft-räumliche Komponente in abstrakteren mathemtischen Denkprozessen zu isolieren, bedingt nun nicht eine modulare Auffassung höherer, kognitiver Prozesse.

----

(34) Bei den psychometrischen Auswertungen des SFT-Math ergaben sich starke Anhaltspunkte für eine Beteiligung räumlich-bildhafter Komponenten bei der Lösung zahlreicher Aufgaben des Typs ABRESY in korrelativen Beziehungen zu anderen Aufgabentypen, im besonderen zu Aufgaben zur Erfassung räumlich-mathematischen Denkens. Einige von uns daraufhin durchgeführte unsystematische Demonstrationen, wie auch einige an Mathematikern und Informatikern erhobenen Protokolle lauten Denkens und introspektiver post-hoc-Beschreibungen der Lösungsstrategien verstärkten den Eindruck einer Beteiligung räumlich-geometrischer Komponenten an den Lösungsprozessen. Der introspektive Eindruck bildhafter Verarbeitung mag ein Epiphänomen sein, das alleine die Einführung eines entsprechenden Konstrukts nicht rechtfertigt. Vor dem Hintergrund anderer in der Literatur berichteter Untersuchungen erscheint uns indes eine systematische Analyse der an der Bearbeitung dieses Aufgabentyps beteiligten Prozesse als lohnend.

Obwohl einflußreiche Arbeiten der Intelligenzforschung (e.g. Sternbergs, 1983, "componential view") wie auch Arbeiten zur "artificial intelligence" diese zentralen Prozesse als modular behandeln, spricht vieles (siehe Fodor, 1983; Neisser, 1983) - auf der Grundlage vorliegenden Datenmaterials wie aus theoretischer Perspektive - dafür, daß die Organisation zentraler Prozesse, insbesondere dessen, was man unter Intelligenz versteht, nicht modular ist.

Der Auffassung einer nicht-modularen strukturell offenen Organisation zentraler Prozesse widerspricht nicht, daß durch zentrale Prozesse eine modulare Einheit des visuellen Systems zur Erzeugung eines neuen, höheren Kodes verwendet werden kann, um die zu verarbeitende Information in optimaler Weise so zu aggregieren und zu kodieren, daß sie den Anforderungen zentraler kognitiver Prozesse möglichst gut entspricht.Die Beteiligung modularer Einheiten zur Erzeugung eines höheren bildhaften Kodes im Dienste zentraler Prozesse und die Einbettung bildhafter Denkprozesse in andere Verarbeitungsprozesse, kann, wie wir meinen, durch den Aufgabentyp ABRESY in vielfältiger und flexibler Weise untersucht werden.

Literaturverzeichnis:

Antis, S.M. (1975). What does visual perception tell us about visual coding. In M.S. Gazzaniga & C. Blakemore (Eds.), Handbook of Psychobiology. New York: Academic Press.

Block, N. (1981). Readings in the philosophy of psychology. Vol. 2. London: Methuen.

Brieskorn, E. (1974). Über die Dialektik in der Mathematik. In M. Otte (Ed.), Mathematiker über die Mathematik. Berlin: Springer.

Carpenter, P.A. & Eisenberg, P. (1978). Mental rotation and the frame of reference in blind and sighted individuals. Perception and Psychophysics, 23, 117-124.

Clark, H.H. (1969). Linguistic process in deductive reasoning. Psychological Review, 76, 387-494.

DeSoto, C.B., London, M. & Handel, S. (1965). Social reasoning and spatial paralogic. Journal of Personality and Social Psychology, 2, 513-521.

Falmagne, R.J. (1975). Deductive processes in children. In R. J. Falmagne (Ed.), Reasoning: Representation and processes in children and adults. : .

Fay, E., Mausfeld, R., Niederée, R., Stumpf, H. & Trost, G. (1982). Studienbezogener Beratungstest Mathematik. Bonn: Institut fär Test- und Begabungsforschung.

Finke, R.A. (1980). Levels of equivalence in imagery and perception. Psychological Review, 87, 113-132.

Fodor, J.A. (1983). The modularity of mind. Cambridge: MIT-Press.

Furneaux, W.D. & Rees, R. (1978). The structur of mathematical ability. British Journal of Psychology, 69, 507-512.

Hadamard, J. (1945). The psychology of invention in the mathematical field. Princeton: Princeton University Press.

Hopcroft, J.E. & Ullman, J.D. (1979). Introduction to automata theory, languages, and computation. Reading : Addison-Wesley.

Huttenlocher, J. (1968). Constructing spatial images: A strategy in reasoning. Psychological Review, 75, 550-560.

Johnson-Laird, P.N. (1972). The three-term series problem. Cognition, 1, 57-82.

Kahnemann, D. & Henik, A. (1981). Perceptual organization and attention. In M. Kubovy & J.R. Pomerantz (Eds.), Perceptual organization. Hillsdale: Erlbaum.

Keating, D.P. & Caramazza, A. (1975). Effects of age and ability or syllogistic reasoning in early adolescence. Developmental Psychology, 11, 837-842.

Kilpatrick, J. & Wagner, S. (1983). Bibliography on mathematical abilities. Georgia: University of Georgia.

Kosslyn, S.M. (1981). The Medium and the message in mental imagery: A theory. Psychological Review, 88, 46-66.

Kosslyn, S.M. (1980). Image and mind. Cambridge: Harvard University Press.

Krutetskii, V.A. (1970). The Psychology of mathematical abilities in school children. Chicago: University of Chicago Press.

Lawson, R. (1977). Representation of individual sentences and holistic ideas. Journal of Experimental Psychology: Human Learning and Memory, 3, 1-9.

Lean, G.A. & Clements, M.A. (1981). Spatial ability, visual imagery, and mathematical performance. Educational Studies in Mathematics, 12, 267-299.

Lennie, P. (1979). Parallel visual pathways: A Review. Vision Research, 20, 561-594.

Lesh, R. & Landau, M. (1983). Aquisition of mathematical concepts and process. New York: Academic Press. TAc

tational?

Marr, D. (1982). Vision. A computional Investigation into the Human Representation and Processing of Visual Informations. San Francisco: Freeman. ?

Maurer, H. (1969). Theoretische Grundlagen der Programmiersprachen. Mannheim: Bibliographisches Institut.

Neisser, U. (1983). Components of intelligence or steps in routine procedures? Cognition, 15, 189-197.

Paige, J.U. & Simon, H.A. (1983). Cognitive processes in solving algebra word problems. In B. Kleinmuntz (Ed.), Problem solving: Research, method and theory. New York: Wiley. H 66

Paivio, A. (1978). The relationship between verbal and perceptual codes. In E. C. Carterette & M.P. Friedman (Eds.), Handbook of Perception, Vol. VIII Perceptual Coding. New York: Academic Press.

Piaget, J. (1928). Judgement and reasoning in the child. London: Routledge of Kegan Paul.

Polya, G. (1954a). Induction and analogy in mathematics. Princeton: Princeton University Press.

Polya, G. (1954b). Patterns of plausible inference. Princeton: Princeton University Press.

Pylyshyn, Z.W. (1981). The imagery debate: Analogue media versus tacit knowledge. Psychological Review, 87, 16-45.

Posner, M.I. (1978). Chronometric explorations of mind. Hillsdale: Erlbaum.

Potts, G.R. & Scholz, K.W. (1975). The internal representation of a three terms series problem. Journal of Verbal Learning and Verbal Behaviour, 14, 439-452.

Quinton, G. & Fellows, B. (1975). "Perceptual" strategies in the solving of three-term series problems. British Journal of Psychology, 66, 69-78.

Schneider, G.E. (1969). Two visual systems. Science, 163, 895-902.

Shaver, P. Pierson, L. Lang, S. (1974). Converging evidence for the functional significance of imagery in problem solving. Cognition, 3, 359-375.

Shepard, R.N. (1978). The mental image. American Psychologist, 33, 125-137.

Shepard, R.N. (1981). Psychophysical complementarity. In M. Kubovy & J.R. Pomerantz (Eds.), Perceptual Organization. Hillsdale: Erlbaum.

Shepard, R.N. & Cooper, L.A. (1982). Mental images and their transformations. Cambridge: MIT-Press.

Sternberg, R. J. (1977). Intelligence, information processing, and analogical reasoning: the componential analysis of human abilities. Hillsdale: Erlbaum.

Sternberg, R.J. (1980). Representation and process in linear syllogistic reasoning. Journal of experimental Psychology, 109, 119-159.

Sternberg, R.J. (1983). Components of intelligence. Cognition, 15, 1-48.

Stumpf, H. & Fay, E. (1983). Schlauchfiguren. Ein Test zur Beurteilung des räumlichen Vorstellungsvermögens. Göttingen: Hogrefe.

Störring, G. (1908). Experimentelle Untersuchungen über einfache Schlußprozesse. Archiv für gesamte Psychologie, 11, 1-127.

Thue, A. (1914). Probleme über Veränderungen von Zeichenreihen nach gegebenen Regeln. Videnskapsselskapets Skrifter, J.H. Math.Naturw. Kl., , 3-34.

Trabasso, T. (1975). Representation, memory and reasoning: How do we make transitive inferences?. In A.D. Pick (Ed.), Minnesota symposia on child psychology. Minneapolis: Univ. of Minneapolis Press.

Treisman, A. & Gelade, G. (1980). A feature-integration theory of attention. Cognitive Psychology, 12, 97-136.

Ungerleider, L.G. & Mishkin, M. (1982). Two cortical visual systems. In D.J. Ingle, M.A. Goodale, R.J.W. Mansfield (Eds.), Analysis of visual behaviour. Cambridge: MIT-Press.

Uttal, W.R. (1982). A Taxonomy of visual processes. Hillsdale: Erlbaum.

van Essen, D.C. (1979). Visual areas of the mammalian cerebral cortex. Annual Review of Neuroscience, 2, 227-263.

van Lint, J.H. (1981). Introduction to coding theory. Heidelberg: Springer.

Zeki, S. (1980). The representation of colours in the cerebral cortex. Nature, 284, 412-418.

Rheinische-Friedrich-Wilhelms-Universität
Psychologisches Institut

Abt. Methodenlehre

Georg Rudinger
Johannes Andres
Marlene Endepohls
Georg Fennekels
Axel Häßner (EDV)
Fred Kannen (EDV)
Rainer Mausfeld
N.N. (EDV)
Stefan M. Schmitz (EDV)
Michael Kavsek

Projekt ANAKONDA

Georg Rudinger
Friedrich Chaselon
Sabine Müller
Hanna Voget
Ejo Zimmermann
Cordelia Zipperling

Römerstr. 164, D-5300 Bonn 1
Federal Republic of Germany